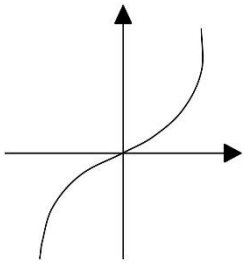
فصل اول - تابع

درس اول - توابع چند جمله ای صعودی و نزولی

الف) رسم نمودار به کمک $y = x^{۳}$



مثال : نمودار های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -x^{۳} + ۱$

ب) $y = -(x + ۱)^{۳} - ۱$

ب) یکنوایی

توابع اکیداً صعودی	$x \uparrow \rightarrow y \uparrow$	ساز موافق $x_۱ > x_۲ \rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$
توابع اکیداً نزولی	$x \uparrow \rightarrow y \downarrow$	ساز مخالف $x_۱ > x_۲ \rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$

تذکر : هر تابع که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ، یک به یک است. تابعی که هم نزولی و هم صعودی است ، ثابت است.

مثال : توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})\quad [۰,۲\pi]$

ب) $f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<-٤ \\ ۳ & -٤\le x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$

پ) $y=۲^{x}-۲$

ت) $y=-log_{۲}^{x}+۲$

ث) $f(x)=x+|x|$

- دامنه توابع چند جمله ای ..... است. (شهریور۱۴۰۰)

- نمودار $y = x^{۲}$ در بازه $(۰،۱)$ پایین تر از نمودار $y = x^{۳}$ است.(دی ۱۴۰۱) **درست**□ **غلط**□

- بزرگترین بازه ای که تابع $f(x) = x^{۲} - ۳x$ در آن اکیداً نزولی است را بیابید؟(مرداد۱۴۰۰)

- تابع $y = \sqrt{۲}x^{۳} - \frac{۳}{۴}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است.(دی ۱۴۰۰) **درست**□ **غلط**□

- تابع $y = ۲x(۱ - ۳x^{۲}) + ۱$ یک تابع چند جمله ای از درجه ..... است.(دی ۱۴۰۱)

- هر تابع یکنوا ، یک به یک است. **درست**□ **غلط**□

- تابع $x^{۲} - ۳x$ در بازه $(۱،۱-)$ اکیداً صعودی است. **درست**□ **غلط**□

درس دوم – ترکیب توابع

$$fog(x) = f(g(x))$$
$$Dfog = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$
$$gof(x) = g(f(x))$$
$$Dgof = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$
$$fof(x) = f(f(x))$$
$$Dfof = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

مثال : تابع gof را بنویسید.(شهریور۱۴۰۱)

$f = \{(0,-1)(5,9)(3,7)(-2,4)\}$ و $g = \{(1,3)(3,-1)(9,0)(-1,4)(7,7)\}$

مثال : اگر $f(X) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشند. (شهریور۱۳۹۹)

الف) دامنه fog را با استفاده از تعریف بنویسید.

ب) ضابطه fog را بنویسید.

مثال : $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$. دامنه و ضابطه fog و fof را بدست آورید.

مثال : اگر $f(x)=۷-۴x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ باشند: (دی۱۴۰۱)

الف) دامنه fog را با استفاده از تعریف بنویسید.

ب) $gof(۱)$؟

مثال : اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ باشند، آنگاه $(fog)(۴)=۵$ است. (دی۱۴۰۱)

درست○ غلط○

مثال : اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد. آنگاه خروجی چند است؟(مرداد ۱۴۰۱)

ورودی $x \rightarrow ۲x-۲ \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \rightarrow$ خروجی

مثال : اگر $fog(x)=۳x^{۲}-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$ باشند. آنگاه ضابطه $g(x)$ را بنویسید. (مرداد۱۳۹۹)

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$ باشند. آنگاه $Dgof$ را بنویسید.

مثال : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵$, $g(x)=x^۲-۳x+۸$ $fog(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱$, $g(x)=۱-۲x$ $gof(x)=-۵$

تبدیل نمودارها

$y=f(x)$

- $y=-f(x)\rightarrow$ قرینه نسبت به محور x ها
- $y=f(-x)\rightarrow$ قرینه نسبت به محور y ها
- $y=-f(-x)\rightarrow$ قرینه نسبت به مبدا
- $y=f(x+k)$ $\overset{k>۰}{\rightarrow}$ K واحد سمت چپ ، $\overset{k<۰}{\rightarrow}$ K واحد سمت راست
- $y=f(x)+k$ $\overset{k>۰}{\rightarrow}$ K واحد بالا ، $\overset{k<۰}{\rightarrow}$ K واحد پایین
- $y=k\ f(x)\rightarrow$ y ها برابر k
- $y=f(k\ x)\rightarrow$ x ها تقسیم بر k

f را رسم کن زیر محور x ها
$y=|f(x)|$ را قرینه کن بیار بالا

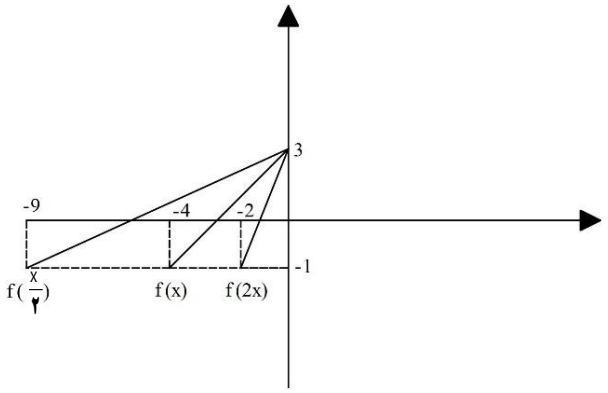
اگر $y=f(x)$ را داشتیم و $y=f(ax+b)$ را می خواستیم، ابتدا با چپ و راست رفتن برعکس ، تکلیف b را مشخص کن. (اگر منفی بود ، سمت راست و اگر مثبت بود ، سمت چپ). سپس x ها را بر a تقسیم کن.

اگر $y=f(ax+b)$ را داشتیم و $y=f(x)$ را می خواستیم، x ها را در a ضرب کن و بعد با b جمع کن.

مثال : $f(x)=x+3$ را با دامنه $[-4,0]$ داریم. $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

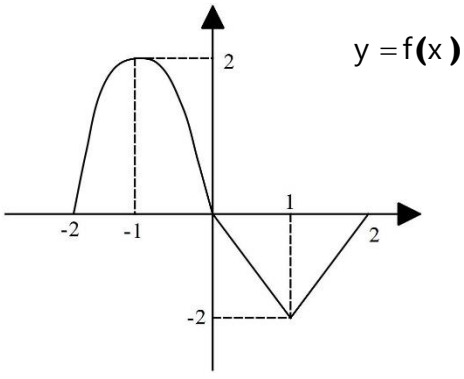
$$-4 \le 2x \le 0 \rightarrow -2 \le x \le 0$$

$$-4 \le \frac{x}{2} \le 0 \rightarrow -8 \le x \le 0$$



* برد توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ و $f(x)$ یکسان است.

مثال : رسم کنید و برد و دامنه را هم تعیین کنید.



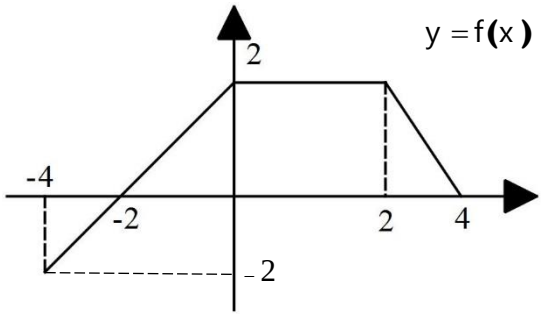
الف) $f(2x)$

ب) $3f(\frac{1}{2}x)$

پ) $f(-x)+2$

ت) $2f(x-1)$

مثال : رسم کنید و برد و دامنه را هم تعیین کنید.



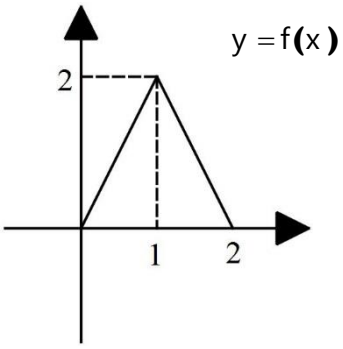
الف) $y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$

ب) $y = -f(-x) + ۲$

پ) $y = ۲f(x - ۱) - ۳$

ت) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

مثال : نمودار $y = -۲f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید. (شهریور۱۳۹۸)



مثال : $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۱$ را دو واحد به سمت پایین و سپس یک واحد به سمت چپ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (شهریور۱۴۰۰)

تابع وارون

$$(a,b)\in f \iff (b,a)\in f^{-1}$$

$$f(a)=b \iff f^{-1}(b)=a$$

نمودار f^{-1} قرینه f نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم ($y=x$) است.

مثال : اگر $f=\{(1,4)(2,3)(3,5)\}$ باشد. آنگاه :

$fof^{-1}(4)=$

$fof^{-1}(3)=$

$fof^{-1}(5)=$

$f^{-1}of(1)=$

$f^{-1}of(2)=$

$f^{-1}of(3)=$

$$(fof^{-1})(x)=x \qquad x\in Df^{-1}$$

$$f^{-1}of(x)=x \qquad x\in Df$$

نتیجه : اگر $xϵDg$ ، $fog(x)=x$ و $xϵDf$ ، $(gof)(x)=x$ باشند . آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید f و g وارون هم اند.

$f(x)=3x-4$

$g(x)=\frac{x+4}{3}$

توابع $x^{۳}$ و $\sqrt[۳]{x}$ وارون هم هستند.

برای بدست آوردن ضابطه وارون ، x را تنها کن. سپس جای y و x را عوض کن.

$$Rf = Df^{-۱} \qquad Df = Rf^{-۱}$$

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x+۳}$ باشد. دامنه و برد تابع اصلی و وارون و ضابطه تابع وارون را بنویسید.

مثال :

۱) $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

۲) $g(x) = ۱ + \sqrt{x-۲}$

۳) $h(x) = x^{۲} + ۱$

مثال : با محدود کردن دامنه تابع $h(x) = x^{۲} - ۲x + ۲$ ، تابعی یک به یک بسازید و آن را وارون کنید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

مثال : اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشند. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)=$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)=$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=$

مثال : اگر $f(x)=۲x^۳-۱$ باشد ، حاصل $f^{-۱}(۱۵)$ چند است؟(دی۱۴۰۱)

مثال : ضابطه وارون $g(x)=۵-\sqrt{۳x+۱}$ را بنویسید.(دی۱۳۹۹)

فصل دوم - مثلثات

$$y = a\sin bx + c \qquad y = a\cos bx + c$$

$$\text{Max} = |a| + c$$

$$\text{Min} = -|a| + c$$

$$\text{دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال :

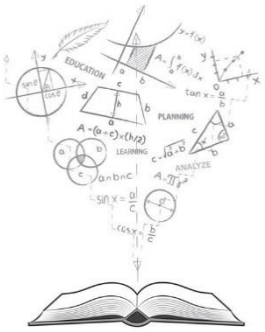
① $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

② $y = \frac{-۱}{۴}\cos(\pi x)$

③ $y = ۸cos(\frac{x}{۳})$

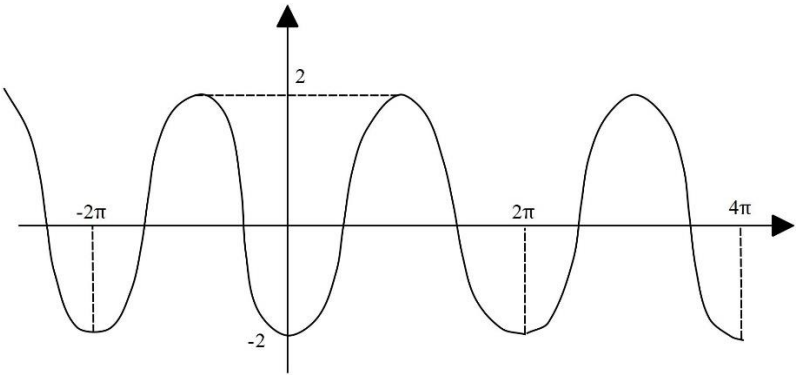
④ $y = \pi\sin(-x) + ۱$

⑤ $y = \sqrt{۳} - cos\frac{\pi}{۲}x$ (مرداد۱۳۹۹)



مثال : ضابطه را مشخص کنید. (دی۱۴۰۰)

$$f(x) = a\cos bx + c$$



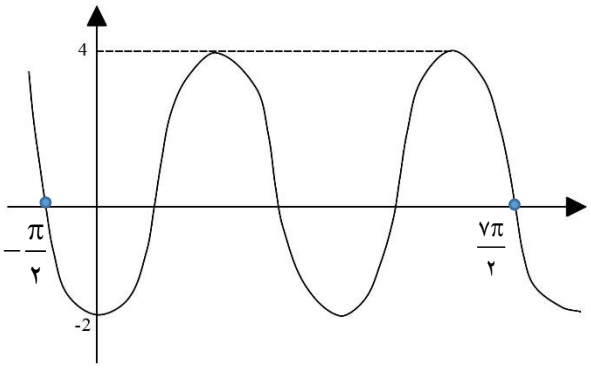
تذکر : $|a| = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2}$ - $c = \frac{\text{Max} + \text{Min}}{2}$

مثال : معادله یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ بنویسید که ماکزیمم آن ۵ و مینیمم آن ۱- و دوره تناوب آن 8π باشد. (شهریور۱۴۰۰)

مثال : معادله یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ که برد $[-4,4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ باشد را بنویسید. (خرداد۱۴۰۱)

مثال : c و b و a را بدست آورید.

$y = acosbx + c$



تذکر

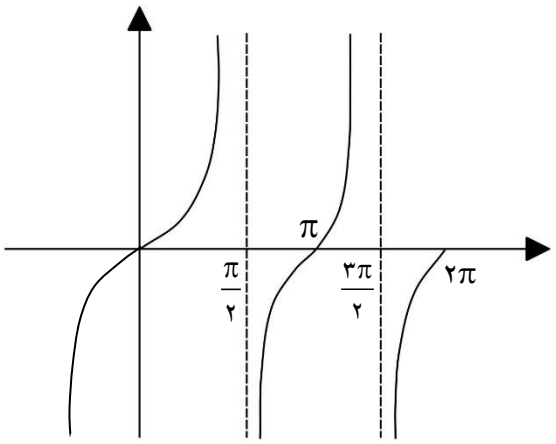
دامنه تانژانت : $tan \cup \rightarrow \cup \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ برد $\leftarrow R$

دامنه کتانژانت : $cot \cup \rightarrow \cup \neq k\pi$ برد $\leftarrow R$

*** تابع تانژانت در کل دامنه اش غیر یکنوا است ولی در بازه هایی که تعریف شده باشد، اکیداً صعودی است. دوره تناوب آن π است.**

مثال : تابع تانژانت در $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ یا $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است.

$[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ غیر یکنوا است و در



$$y = a + tanbx + c \;\rightarrow\; T = \frac{\pi}{|b|}$$

دوره تناوب $y = |sinx|$ و $y = |cosx|$ و $y = sin^{2k}x$ و $y = cos^{2k}x$ نیز π می باشد.

مثال: دامنه $y = tan2x$ را بیابید.

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

مثال : $sin\alpha$ و $tan\alpha$ را باهم مقایسه کنید.

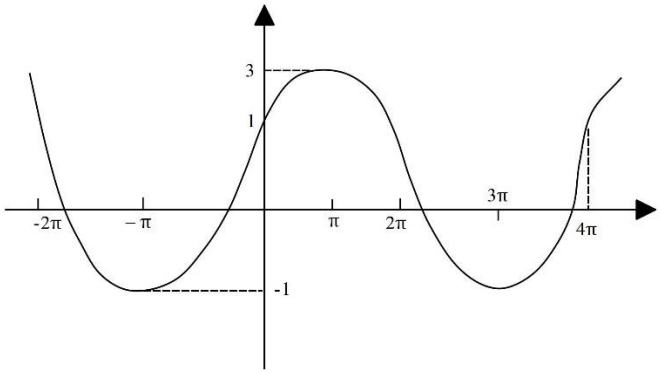
الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

مثال : ضابطه تابع مثلثاتی بنویسید.

$T = 3\ , Max = 9\ , Min = 3$

تذکر : Max و Min تابع کسینوس روی محور y ها است ولی سینوس نه!

مثال : ضابطه بنویسید.



مثال : رسم کنید.

$$①\ y = sin۲x \qquad ②\ y = ۱ - cos۲x \qquad ③\ y = ۲ - cos\frac{۱}{۲}x$$

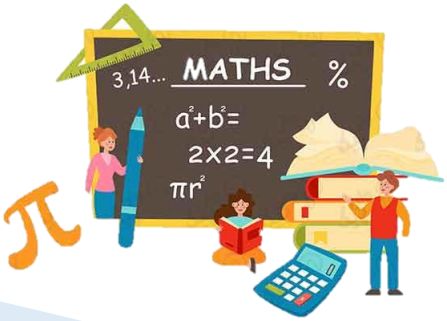
نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان

$$sin۲\alpha = ۲sin\alpha cos\alpha \rightarrow sin\alpha cos\alpha = \frac{۱}{۲}sin۲\alpha$$

$$cos۲\alpha = cos^{۲}\alpha - sin^{۲}\alpha \rightarrow \begin{matrix} cos۲\alpha = ۱ - ۲sin^{۲}\alpha \\ cos۲\alpha = ۲cos^{۲}\alpha - ۱ \end{matrix}$$

$$cos^{۲}\alpha = \frac{۱+cos۲\alpha}{۲} \qquad sin^{۲}\alpha = \frac{۱-cos۲\alpha}{۲}$$

مثال : $sin۱۵$ و $cos۲۲/۵$ را بدست آورید.



مثال : $cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α حاده است. حاصل $sin۲\alpha$ و $cos۲\alpha$ را بیابید.

مثال : حاصل $۴sinx\ cosx\ cos۲x$ را به ازای $x = ۷/۵$ محاسبه کنید.

معادله مثلثاتی

$$sin\square = \sin\bigcirc \rightarrow \begin{matrix}\square = ۲k\pi + \bigcirc \\ \square = ۲k\pi + \pi - \bigcirc\end{matrix}$$

$$cos\square = \cos\bigcirc \rightarrow \square = ۲k\pi \pm \bigcirc$$

$$sin\square = ۰ \rightarrow \square = k\pi$$

$$sin\square = ۱ \rightarrow \square = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$sin\square = -۱ \rightarrow \square = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$$

$$cos\square = ۰ \rightarrow \square = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$cos\square = ۱ \rightarrow \square = ۲k\pi$$

$$cos\square = -۱ \rightarrow = ۲k\pi + \pi$$

تذکر : اگر زاویه سمت راست تساوی منفی بود، برای سینوس، منفی پشت زاویه بگذار و برای کسینوس، مکمل را بنویس.

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۴sinx + \sqrt{۸} = ۰$

۲) $sin۲x = sin۳x$

۳) $sinx\ cosx = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $۲sin۳x - \sqrt{۲} = ۰$

۵) $cosx(۲cosx - ۹) = ۵$

۶) $cosx = cos۲x$

۷) $cos^{۲}x - sinx = \frac{۱}{۴}$

۸) $cos۲x - ۳sinx + ۱ = ۰$

۹) $sinx - cos۲x = ۰$

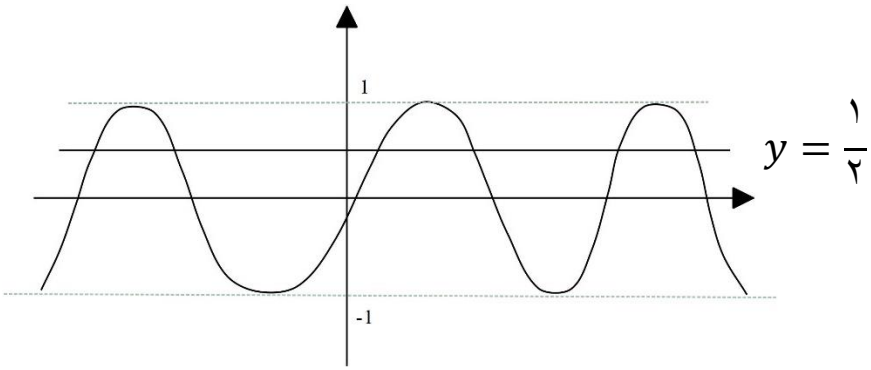
۱۰) $cos۲x - sinx + ۱ = ۱$

مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ \frac{m}{s}$ پرتاب می کند . هم تیمی او در ۱۲/۸ متری او قرار دارد. رابطه بین سرعت توپ و مساحت طی شده و زاویه پرتاب به صورت زیر است. زاویه پرتاب چند بوده است؟

$$d = \frac{v^{۲} sin۲\theta}{۱۰}$$

مثال : مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع داریم. اگر اندازه دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد، چند مثلث با این خاصیت می توان ساخت؟

مثال : $y = sinx$ و خط به معادله $y = \frac{۱}{۲}$ رسم شده است. طول نقاط برخورد را بیابید. (دی۱۴۰۱)



فصل سوم – حد

در تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $x-a$ باقی مانده تقسم برابر $f(a)$ است. یعنی اگر $f(a)=0$ باشد، آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

مثال : نشان دهید چند جمله ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر $x+2$ بخش پذیر است و به کمک تقسیم به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

مثال : باقی مانده تقسیم $2x^2-5x+1$ بر $x-3$ برابر است با .....

حد ÷ : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\div$ ← مبهم است و عامل صفر شونده $x-a$ را به وجود می آوریم و حذف می کنیم.

① $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}$

② $\lim_{x\to -۲} \frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$

③ $\lim_{x\to ۵} \frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$

④ $\lim_{x\to ۸} \frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$

⑤ $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$ (دی۱۴۰۱)

⑥ $\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}$ (خرداد۱۳۹۸)

⑦ $\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$ (دی۱۳۹۸)

⑧ $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$ (دی۱۴۰۰)

همسایگی

هر بازه شامل عدد x را یک همسایگی x می نامیم.

یعنی اگر $x \leftarrow (a,b)$ باشد ، آنگاه (a,b) یک همسایگی x است. مثلاً $(۲,۵)$ یک همسایگی برای ۳ است.

همسایگی محذوف

$(a,b)-\{x\}$ را یک همسایگی محذوف برای x می نامیم. $\left(\frac{۵}{۴},۴\right)-\{۳\}$ همسایگی محذوف برای ۳ است.

بازه $(۳,۴)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{۳}{۲},۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است.

مثال : دامنه $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام عدد است؟

نکته :

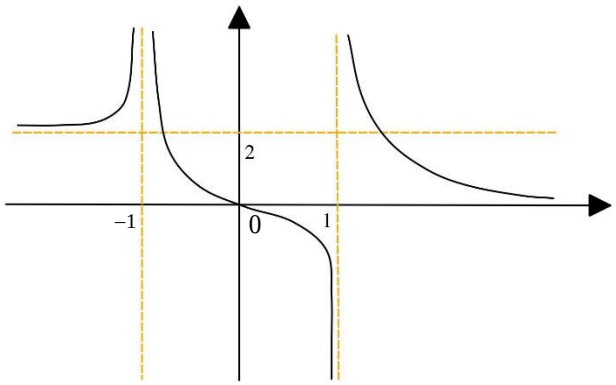
$$\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

یعنی می توان f(x) را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد مشروط بر آنکه x به اندازه کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

یعنی می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد مشروط بر آنکه x به اندازه کافی به a نزدیک شود.



$$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x) =$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) =$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) =$$

مثال : حاصل حد های زیر را حساب کنید.

① $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$

② $\lim\limits_{x\to۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$

③ $\lim\limits_{x\to۰} \frac{-۱}{x^۲}$

④ $\lim\limits_{x\to۰} \frac{x+۱}{sin^۲x}$

⑤ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{۱}{cosx}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} tanx$

⑦ $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴}$

⑧ $\lim\limits_{x\to۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$

⑨ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}} tanx$

مثال : نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد .

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۱-cosx}$ (شهریور۱۳۹۸)

قانون پرتوان :

توان های بیشتر را در $\frac{\infty}{\infty}$ ها از صورت و مخرج نگه می داریم و بقیه را حذف می کنیم.

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}$

② $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+۲}{x-۱}$

③ $\lim_{t\to-\infty} \frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$

مثال : رسم کنید و حدود را بدست آورید.

① $f(x)=\frac{۱}{x}$

② $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

⑤ $\lim\limits_{x\to۰} f(x)$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

⑦ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

مثال :

① $\lim\limits_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^{۳}})$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳}$

④ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}+۵x^{۳}}{۲x^{۳}+۹}$ (شهریور۱۴۰۰)

⑤ $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲x}}{x}$

⑥ $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲-\sqrt{x^۲+۱}}{x^۲+۳x}$

⑦ $\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x+\sqrt{x^۲-x+۲}}{x+\sqrt[۳]{۸x^۳+x^۲-۱}}$

مثال : حاصل $a+b+n$ را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(a-۴)x^۵+۲x^n-x+۱}{bx^۳-۵x+۷} = ۱$$

حد در بی نهایت :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

یعنی $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

$$\lim_{x\to+\infty} ۲x - ۳ + ۵x^۲$$

فصل چهارم - مفهوم مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال : با استفاده از تعریف ، مشتق تابع $f(x) = x^{۳} - ۲$ را در نقطه ای به طول $x = -۱$ بدست آورید.

تذکر

معادله خط مماس : شیب همان مشتق در طول نقطه تماس است.

$$y - y_{۰} = f'(a)(x - x_{۰})$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^{۲} + ۱۰x$ را در نقطه ای به طول $x = ۲$ بنویسید.

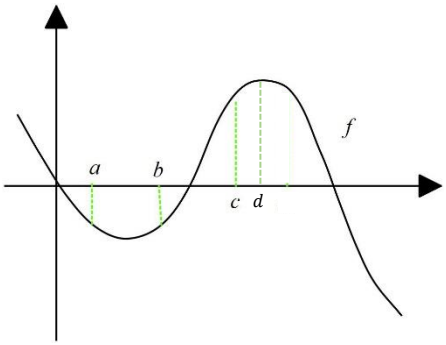
تذکر

شیب مثبت هرچه به ۹۰ نزدیکتر ، بزرگتر است.

شیب صفر، خط افقی است.

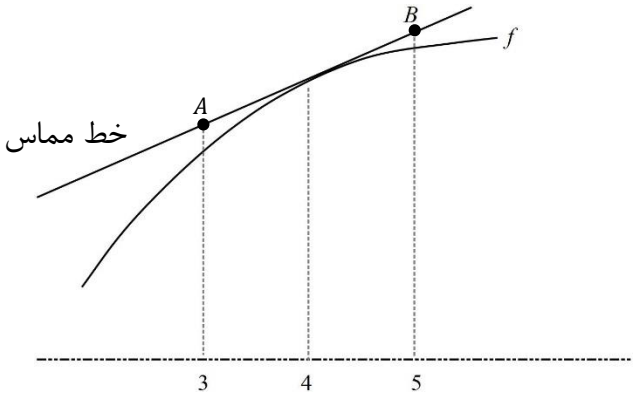
شیب منفی هرچه به ۱۸۰ نزدیکتر شود ، بزرگتر است.

مثال : (شهریور۱۴۰۰)

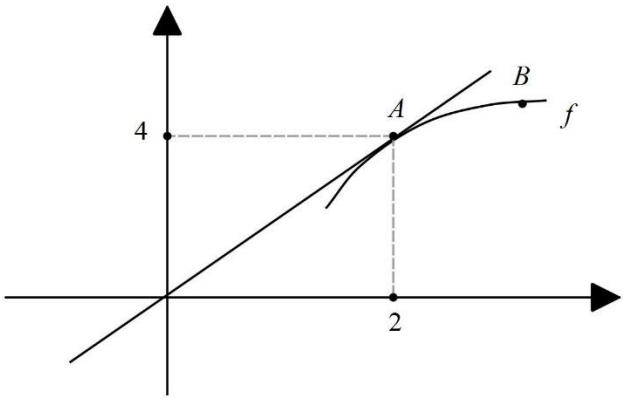


x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵

مثال : برای تابع f داریم $f(۴) = ۲۵$ و $f'(۴) = \frac{۳}{۲}$. با توجه به شکل مختصات A و B را بیابید.



الف) $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید. (دی۱۴۰۱)



ب) شیب خط مماس در A و B را مقایسه کنید.

○ ○ ○ مشتق پذیری و پیوستگی ○ ○ ○

اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه در a پیوسته است.

اثبات:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=$$
$$\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=۰\times f'(a)=۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=۰\rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

تذکر

اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد ، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

شرط مشتق پذیری:

(یعنی مماس کامل در $x=a$ داریم.)

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

شیب نیم مماس راست ← $f'_+(a)$ ، $f'_-(a)$ → شیب نیم مماس چپ

مثال : مشتق پذیری $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید و معادله نیم مماس راست و چپ را بنویسید.

*** تذکر ***

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

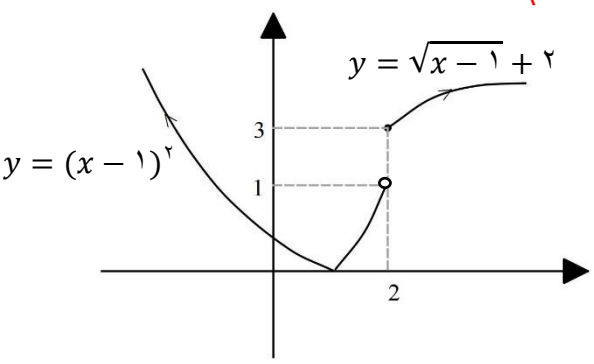
$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند و $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیست.

مثال : مشتق پذیری $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

مثال : مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

مثال : اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & x\geq 2 \\ (x-1)^2 & x<2 \end{cases}$ باشد: (دی ۱۴۰۱)



الف) آیا f در $x=2$ مشتق پذیر است؟

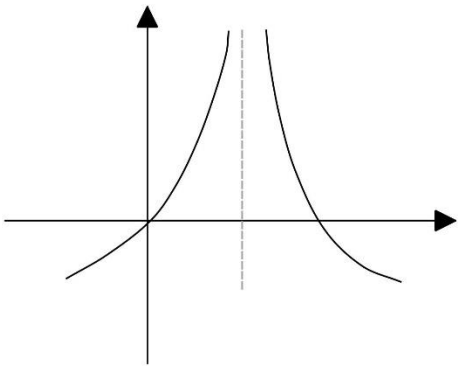
ب) آیا در $(-\infty,2)$ مشتق پذیر است؟

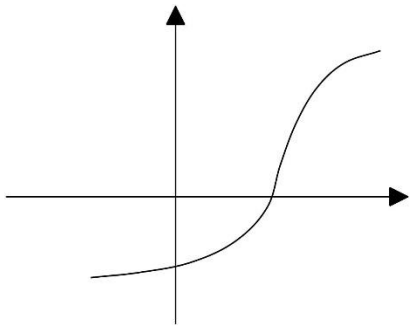
پ) مشتق راست f در $x=2$ را بدست آورید.

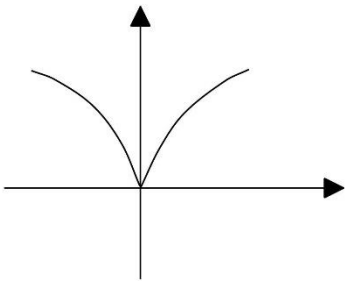
تذکر

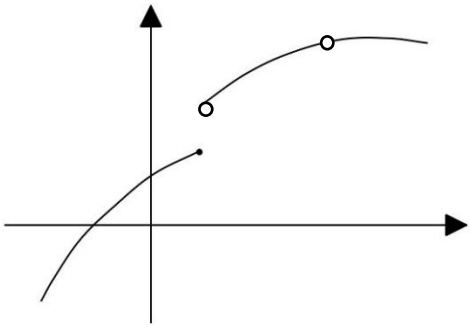
نقاط مشتق ناپذیری

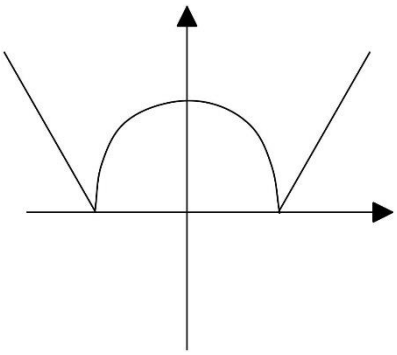
- ناپیوسته
- گوشه (مشتق راست و چپ یکی عدد و یکی بی نهایت یا هر دو عدد نابرابر)
- بازگشت (مشتق راست و چپ بی نهایت های غیر هم علامت)
- عطف قائم (مشتق راست و چپ بی نهایت های هم علامت)











مثال : اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ تابع مشتق و دامنه آن را بدست آورید.

مثال : اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ باشد، دامنه f و دامنه f' و ضابطه f' و نمودار f و f' را بنویسید.

محاسبه تابع مشتق : (قواعد مشتق گیری)

$f(x)=$ عدد ثابت $\rightarrow f'(x)=۰$

$f(x)=ax \rightarrow f'(x)=a$

$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-۱}$

$f(x)=\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$f(x)=\sqrt{\cup} \rightarrow f'(x)=\frac{\cup'}{۲\sqrt{\cup}}$

$f(x)=\sqrt[۳]{x} \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

$f(x)=\sqrt[m]{\cup^n} \rightarrow f'(x)=\frac{n\cup'}{m\sqrt[m]{\cup^{m-n}}}$

$f(x)=\cup^n \rightarrow f'(x)=n\cup^{n-۱}\times\cup'$

$f(x)=k\cup \xrightarrow{k\in\mathbb{R}} f'(x)=k\cup'$

$f(x)=\cup\pm v \rightarrow f'(x)=\cup'\pm v'$

$f(x)=\cup vw \rightarrow f'(x)=\cup' vw+v'\cup w+w'v\cup$

$f(x)=\frac{\cup}{v} \rightarrow f'(x)=\frac{\cup' v-v'\cup}{v^۲}$

$f(x)=\cup v \rightarrow f'(x)=\cup' v+v'\cup$

مثال : مشتق بگیرید.

① $f(x)=(۲x^۳+۱)(-x^۲+۷x-۲)$

② $f(x)=\frac{x^۲-۴}{۳x+۱}$

③ $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$

④ $f(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$

⑤ $f(x)=\frac{x}{۲x^۲+x-۱}$

⑥ $f(x)=(x^۲+۳x+۱)^۷$

⑦ $f(x)=(\frac{x^۲}{۳x-۱})^۵$

⑧ $f(x)=(x^۲+۱)^۳(۵x-۱)$

⑨ $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)^۳$

⑩ $f(x)=x(x-۱)(x+۱)$

(دی ۱۴۰۱)

⑪ $g(x)=(\frac{۱}{x})(x^۲+۵x)^۷$

(شهریور۱۳۹۹)

⑫ $f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۴}{x+۱}}$

(خرداد۱۴۰۱)

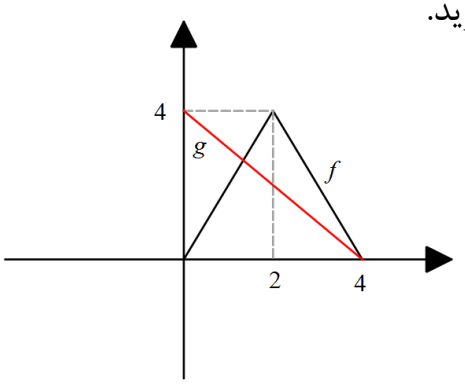
مثال : اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ باشد، مطلوب است:

الف) $(f+g)'(۱)$

ب) $(۳f+۲g)'(۱)$

مثال : اگر f و g توابعی مشتق پذیر باشند و $f(۲)=۳, f'(۲)=۵, g(۲)=۸, g'(۲)=-۶$ باشند، مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را بدست آورید.

مثال : باتوجه به نمودار حاصل $(۳f+۲g)'(۱)$ را بدست آورید.



مثال : اگر $f(x)=(x+\sqrt{x^۲-x})^۳$ و $g(x)=(x-\sqrt{x^۲-x})^۳$ باشند، حاصل $f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)$ را بدست آورید.

○ ○ ○ مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری) ○ ○ ○

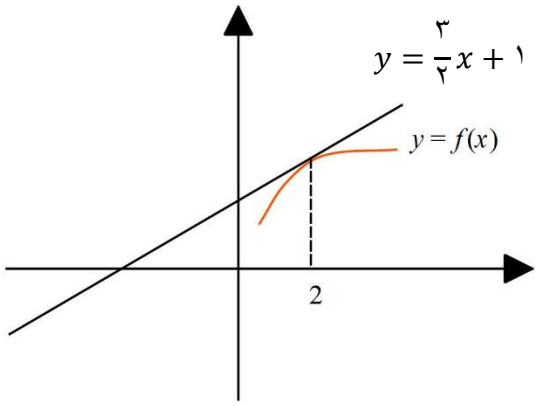
$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$(f(U))' = U' \times f'(U)$$

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{۴x - ۷}$ و $g(x) = ۲x^۲ + \frac{۱}{x}$ باشند ، مشتق gof را در $x = ۲$ بدست آورید.

مثال : اگر شیب خط مماس بر f در نقطه $A(-۲, -۳)$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ باشد. مشتق $y = x^۲ f(x)$ را در $x = -۲$ بدست آورید.

مثال : با توجه به شکل ، مشتق $y = \frac{f(x)}{x^۲+x}$ را در $x = ۲$ بیابید.



مشتق پذیری روی بازه

(a,b) ← فقط بین a تا b مشتق پذیره

$[a,b]$ ← هم بین a تا b مشتق پذیره – هم در a مشتق راست (پیوستگی راست) و هم در b مشتق چپ (پیوستگی چپ) دارد.

$[a,b)$ ← بین a تا b مشتق پذیره و در a مشتق راست (پیوستگی راست) دارد.

$(a,b]$ ← بین a تا b مشتق پذیره و در b مشتق چپ (پیوستگی چپ) دارد.

مثال : مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را روی بازه های $[-۲,۱]$ و $(۱,+\infty)$ و $[۱,۲]$ بررسی کنید.

مثال : $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری را در بازه های زیر بررسی کنید.

$[-۱,۱], (۲,۵), [-۲,۰]$

مثال : $f(x)=\begin{cases}۵x-۴ & x<۰\\ x^{۲} & ۰\le x\le ۳\\ x+۶ & x>۳\end{cases}$

الف)رسم کنید.

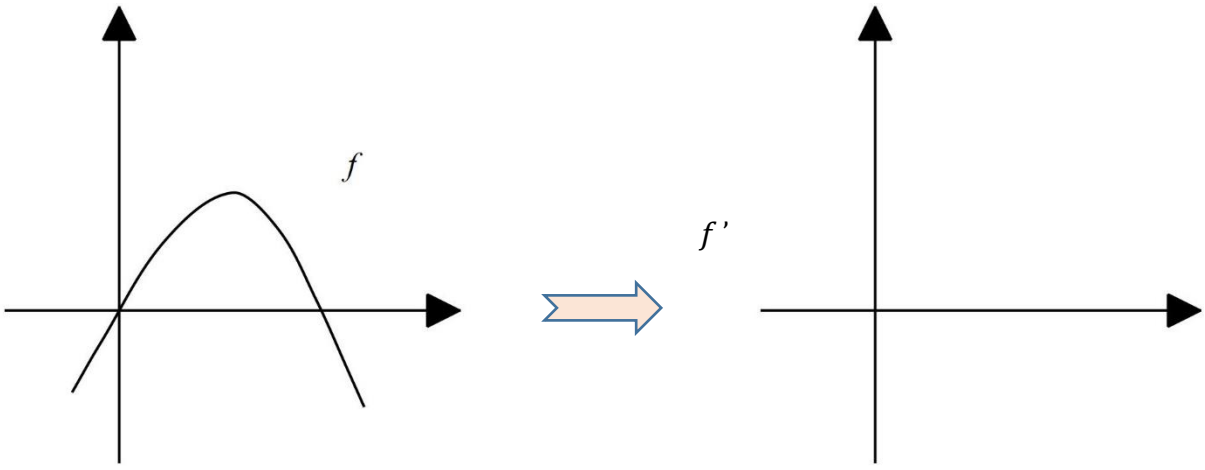
ب)مشتق پذیری را در $x=۰$ و $x=۳$ بررسی کنید.

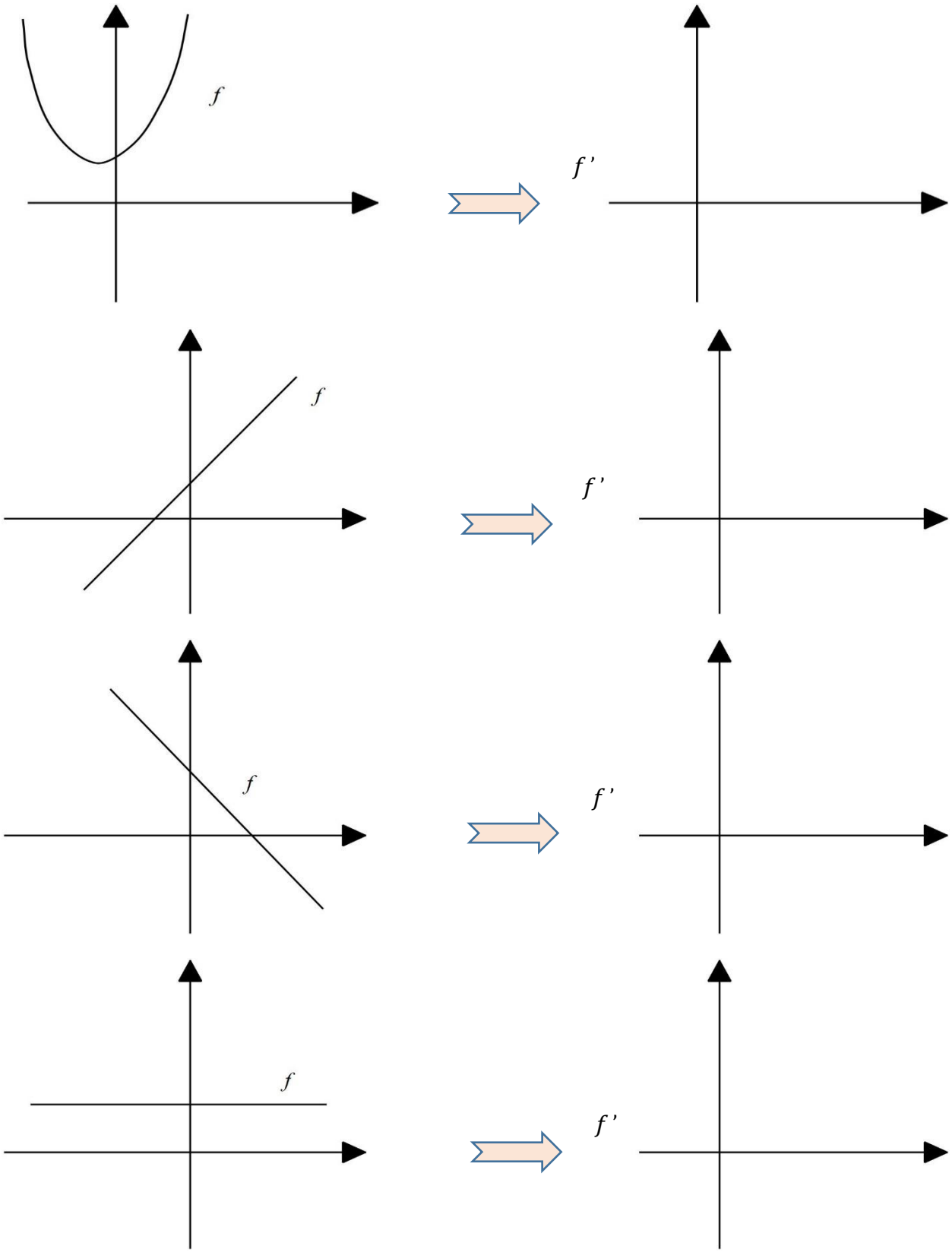
پ)ضابطه مشتق را بنویسید.

ت)نمودار f' را رسم کنید.

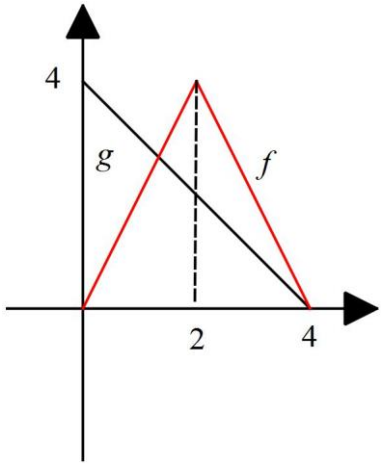
مثال : مشتق $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ را بدست آورید و مشخص کنید در چه نقطه ای مماس قائم دارد؟

مثال : نمودار مشتق را رسم کنید.




f
f '
f
f '
f
f '
f
f '

مثال : اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد ، مطلوب است : $k'(۱)=?$



مثال : اگر $f(x)=۵x^{۳}-۴x^{۲}-۳x$ باشد ، مقدار $f''(-۱)$ را بدست آورید.

○ ○ ○ آهنگ تغییر ○ ○ ○

آهنگ تغییر متوسط در $[a,b]$ $\leftarrow$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ تغییر لحظه ای در $x=a$ $\leftarrow$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

مثال : معادله حرکت متحرکی $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ در بازه $[۰,۵]$ است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در $[۰,۵]$ برابر است ؟

مثال : یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^{۳}$ گرم است.(خرداد ۱۳۹۹)

الف) جرم این توده باکتری در $۱ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می یابد ؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در $t = ۴$ چند است ؟

مثال : جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می شود. جهت حرکت به بالا را مثبت می گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه $h(t) = -۵t^{۲} + ۴۰t$ است.(خرداد ۱۴۰۰)

الف) سرعت متوسط جسم در بازه $[۵,۸]$ را به دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم $۳۵\frac{m}{s}$ است؟

مثال : تابع $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ قد متوسط کودکان بر حسب سانتی متر تا ۶۰ ماهگی را نشان می دهد. که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. اهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۲۵]$ چند است؟

مثال : درستی یا نادرستی را تعیین کنید.

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابع صعودی باشد ، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که بر آن هم $f(a) = ۰$ و هم $f'(a) = ۰$ باشد.

مثال : گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $v = ۴۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه $[۰,۱]$ چند است ؟

ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ میشود؟

□ □ □ فصل ۵ – کاربرد مشتق □ □ □

آزمون یکنوایی تابع:

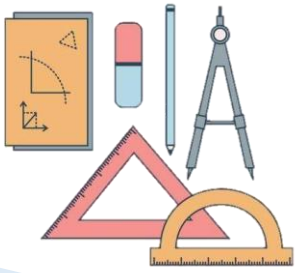
f' را به دست می آوریم و آن را تعیین علامت میکنیم.

- اگر در یک بازه از دامنه f ، $f' > 0 \rightarrow f$ اکیداً صعودی
- اگر در یک بازه از دامنه f ، $f' < 0 \rightarrow f$ اکیداً نزولی
- اگر در یک بازه از دامنه f ، f' موجود و صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابع ، ثابت است.

مثال : تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه ها اکیداً نزولی است؟

مثال : بزرگترین بازه ای که $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد را بیابید.

مثال : با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ بازه هایی که در آن صعودی اکید و بازه هایی که نزولی اکید است را مشخص کنید.



اکسترمم های نسبی تابع

- تابع f درنقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد. هرگاه یک همسایگی از c داشته باشید،

$f(c) \geq f(x)$ است.

- به طور مشابه اگر $f(c) \leq f(x)$ باشد ، مینیمم نسبی است.

x	c	
f '	+	-
f	↗	↘

نسبی max $f(c)$

x	c	
f '	-	+
f	↘	↗

نسبی min $f(c)$

اکسترمم های نسبی ریشه های ساده مشتق هستند. مثال: $f(x) = (x - ۱)^۳$

نقاط بحرانی: نقاطی از دامنه تابع هستند که در آنها مشتق یا صفر است یا وجود ندارد.

تذکر: ابتدا و انتهای بازه بسته ، بحرانی هستند.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را به دست آورید.

① $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$

② $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$

③ $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول c اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد ، آنگاه:

$$f'(c) = ۰$$

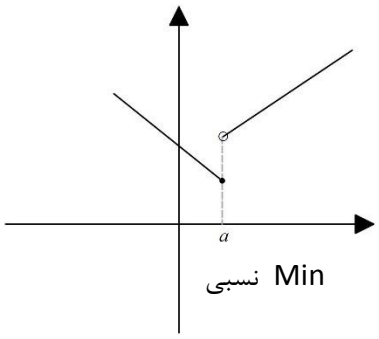
به عبارت دیگر اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی است.(همیشه عکس آن درست نیست)

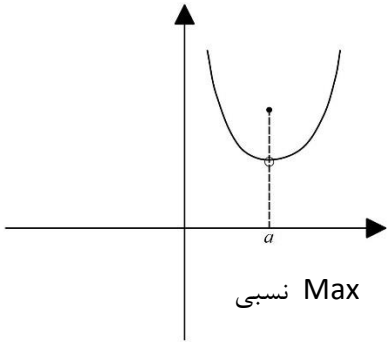
$f(x) = (x-۱)^۳ \leftarrow x = ۱$ یک نقطه بحرانی است ولی مشتق اطراف آن تغییر علامت نمی‌دهد پس اکسترمم نسبی نیست.

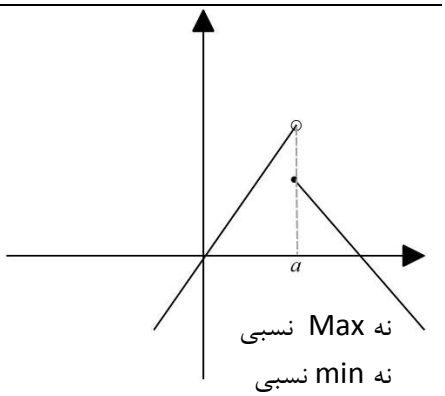
مثال: $f(x) = |x-۲|$ با رسم شکل نشان دهید در $x = ۲$ مینیمم نسبی دارد؟

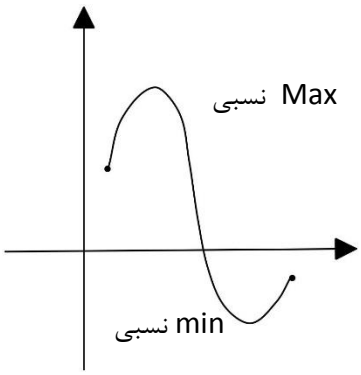
- آیا $f'(۲)$ موجود است ؟

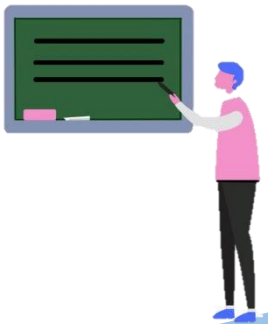
- آیا $x = ۲$ نقطه بحرانی است ؟











اکسترمم های نسبی ریشه های ساده f' هستند یعنی مشتق در اطراف آنها تغییرعلامت می دهد.
اگر مشتق تغییر علامت ندهد(ریشه مضاعف f') نقطه اکسترمم نسبی نیست.

مثال: ابتدا نقاط بحرانی را بیابید ، سپس با رسم جدول تغییرات نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را در صورت وجود مشخص کنید.

① $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰$

② $f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$

③ $f(x) = -x^۳ - ۳x + ۲$

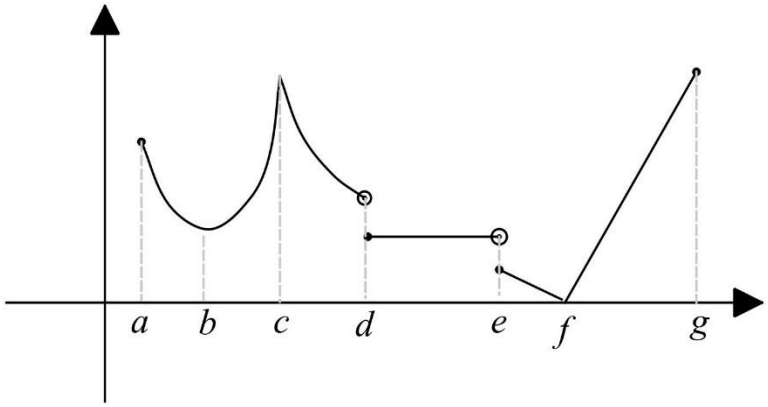
اگر نقطه $A(a,b)$ اکسترمم نسبی تابع f باشد $\begin{cases} f(a) = b \\ f'(a) = ۰ \end{cases}$

مثال : اگر نقطه $A(۲,۱)$ اکسترمم نسبی $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، d و b را بیابید.

اکسترمم های مطلق:

نقاطی از دامنه تابع که بیشترین و کمترین عرض را دارند ، اکسترمم مطلق هستند. اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد ، در این بازه هم max مطلق و هم min مطلق دارد.

مثال : اکسترمم مطلق ، نسبی و نقطه بحرانی را پیدا کن.



مثال : به کمک رسم ، اکسترمم نسبی و مطلق را پیدا کن . (درصورت وجود)

① $f(x) = x^{۳} \quad [-۲,۱]$

② $f(x) = -x^{۲} \quad [-۲,۳]$

③ $g(x) = \frac{۱}{x}$

④ $g(x) = |x^{۲} - ۱| \quad [-۲,۳]$

مراحل اکسترمم مطلق پیدا کردن

۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می یابیم.

۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه بسته می یابیم.

۳- بزرگترین عدد ، ماکسیم مطلق و کوچکترین ، مینیمم مطلق در بازه است.

مثال : اکسترمم های مطلق $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در $[-۱,۳]$ تعیین کنید.

مثال : اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

الف) $f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳ \quad [-۱,۲]$

ب) $f(x) = x^۳ + ۲x - ۵ \quad [-۲,۱]$

مثال : اکسترمم های نسبی تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x + \frac{۲}{۳}$ را در صورت وجود بیابید.

○ ○ ○ بهینه سازی ○ ○ ○

مثال : نشان دهید در بین تمام مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر ، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.

مثال : دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضرب شان کمترین مقدار ممکن گردد. (دی۱۳۹۸و۱۴۰۱)

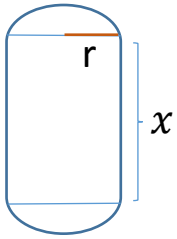
مثال : اگر بین دو عدد حقیقی x, y رابطه $5x - y = 10$ برقرار باشد. مقادیر x, y را طوری بیابید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد. (مرداد ۱۴۰۱)

مثال : ورق فلزی مربعی شکل به طول یک متر می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش دهیم. سپس با تا کردن ورق ، جعبه در باز بسازیم. مقدار x چند باشد تا حجم قوطی حداکثر ممکن گردد ؟

مثال : هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی شامل یک متن با مساحت $32\ cm^2$ است. حاشیه های بالا و پایین هر صفحه ۲cm و حاشیه های کناری هر کدام ۱cm در نظر گرفته شده است. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد. (خرداد۱۳۹۹)

مثال : غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه $p(t)=\frac{۲t}{t^{۲}+۱۶}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق غلظت آن بیشترین مقدار ممکن می شود ؟

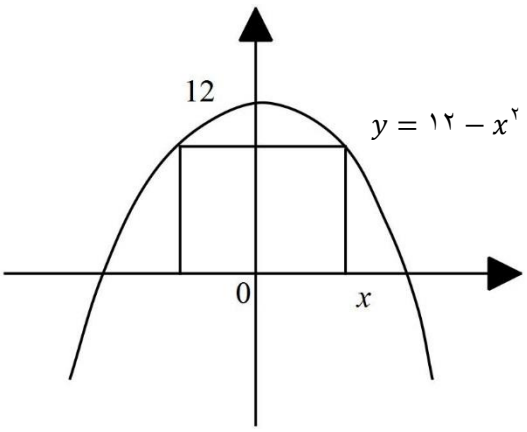
مثال : دو نیم دایره و یک مستطیل داریم. اگر محیط شکل ۲۴۰ متر باشد و مساحت مستطیل ماکسیمم باشد ، طول مستطیل را به دست آورید.



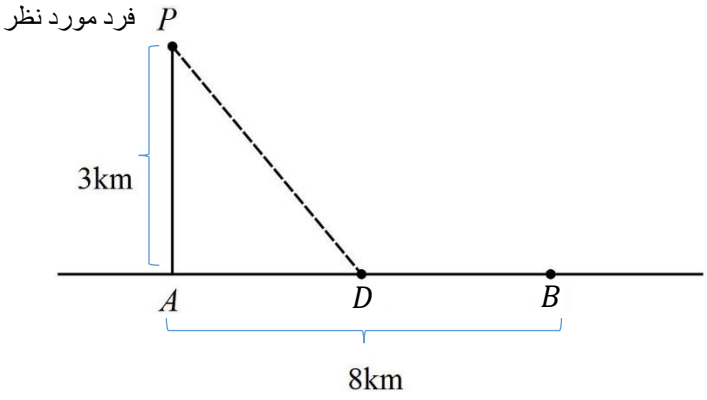
مثال : یک قوطی کنسرو در بسته به شکل استوانه دارای حجم $۵۰۰\text{cm}^{۳}$ است. شعاع قاعده کنسرو چند سانتی متر باشد تا هزینه تولید قوطی مینیمم شود ؟

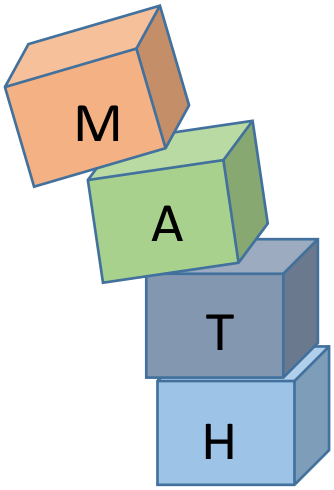
مثال: می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعده مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم ، بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چند خواهد بود؟

مثال: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو راس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشد.



مثال: فردی درون یک قایق به فاصله ۳ کیلومتری از دریا است است و می خواهد به نقطه B برود. ابتدا به نقطه D می رود سپس D به B را پیاده روی می کند. اگر سرعت قایق $\frac{km}{h}$ ۲ و سرعت پیاده روی $\frac{km}{h}$ ۴ باشد.نقطه D چند کیلومتر از A فاصله داشته باشد تا فرد در کمترین زمان به B برسد ؟





○ ○ فصل ٦- مقاطع مخروطی ○ ○

- ❖ شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن.....
- ❖ شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است.....
- ❖ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه.....
- ❖ شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطر های آن.....
- ❖ شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن.....
- ❖ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن.....

برش

- ✓ شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور عمودی.....
- ✓ شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور عمودی.....

مثال: مستطیلی را حول عرض آن دوران داده ایم.

الف) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است ؟

ب) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۴ باشد ، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده این استوانه چند است ؟

پ) در حالت قبل اگر صفحه عمود بر قاعده استوانه، آن را قطع کند. بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چند است ؟

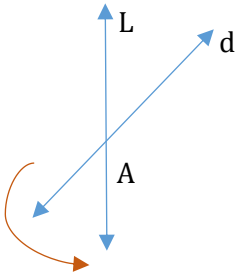
وقتی سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده میشود ، سطح مقطع به وجود می‌آید:

الف) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند ، **دایره** به وجود می آید.

ب) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از راس نگذرد ، **بیضی** به وجود می‌آید.

پ) اگر صفحه در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از آن عبور نکند ، **سهمی** به وجود می‌آید.

ت) اگر صفحه سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم قسمت پایینی قطع کند و از راس عبور نکند ، **هذلولی** به وجود می آید.

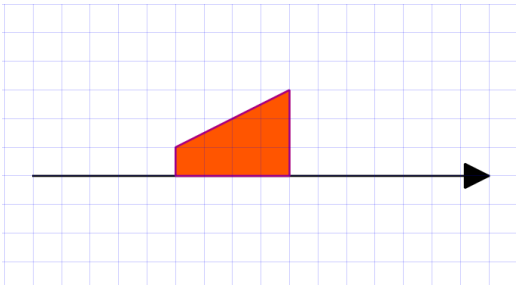


A ← راس

L ← محور

d ← مولد

مثال : در شکل روبه رو میخواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.



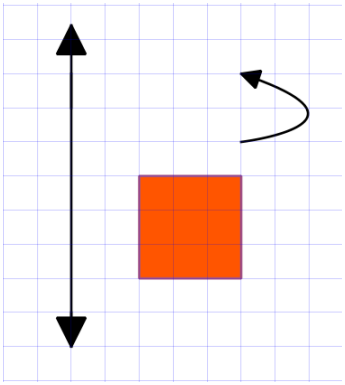
الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

مثال : مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل زیر در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

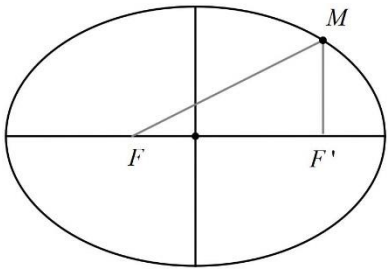
الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.



مثال : اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود ، حجم شکل حاصل چقدر است؟

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموعه فواصل آن ها آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه برابر مقداری ثابت است.(نقاط ثابت کانون های بیضی اند.)



- M روی بیضی $\rightarrow MF+MF'=2a$
- M خارج بیضی $\rightarrow MF+MF'>2a$
- M داخل بیضی $\rightarrow MF+MF'<2a$

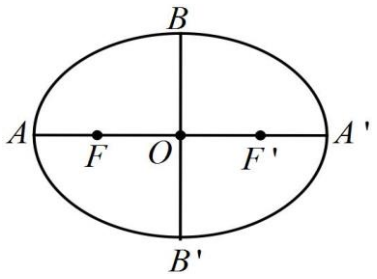
قطر بزرگ بیضی $2a$ ، قطر کوچک $2b$ در فاصله کانونی $2c$ است.

قطر بزرگ(قطر کانونی) $\rightarrow AA' = ۲a$

قطر کوچک(قطر غیر کانونی) $\rightarrow BB' = ۲b$

فاصله کانونی $\rightarrow FF' = ۲c$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$



مرکز بیضی همواره وسط FF' و BB' و AA' است. $O(\alpha, \beta)$

- اگر بیضی افقی باشد، معادله قطر بزرگ $y = \beta$ و معادله قطر کوچک $x = \alpha$ است .

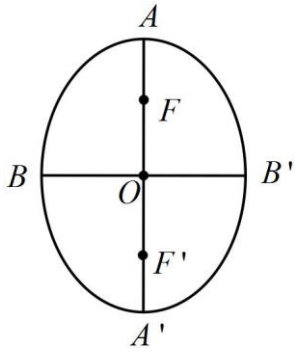
- اگر بیضی قائم باشد، معادله قطر بزرگ $x = \alpha$ و قطر کوچک $y = \beta$ است.

در بیضی افقی :

$$B'(\alpha, \beta - b), B(\alpha, \beta + b), A(\alpha - a, \beta), A'(\alpha + a, \beta), F'(\alpha + c, \beta), F(\alpha - c, \beta), O(\alpha, \beta)$$

در بیضی قائم:

$$B'(\alpha + b, \beta), B(\alpha - b, \beta), A(\alpha, \beta + a), A'(\alpha, \beta - a), F'(\alpha, \beta - c), F(\alpha, \beta + c), O(\alpha, \beta)$$



مثال : اگر در بیضی $a = ۵$ و $b = ۳$ باشد. فاصله کانونی چقدر است ؟

مثال : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ است. مرکز بیضی (۴،۵) است.

الف)فاصله کانونی

ب)مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و کانون های بیضی را بدست آورید.

خروج از مرکز بیضی ← $(۰ < e < ۱)$ $e = \frac{c}{a}$

اگر e=۰ باشد ، دایره و هرچه به e نزدیک تر شود ، بیضی کشیده تر می شود و در e=۱ پاره خط خواهد شد.

مثال : کانون های یک بیضی (۱،۳) و (۱،-۵) است.

الف) فاصله کانونی ، مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ و کوچک

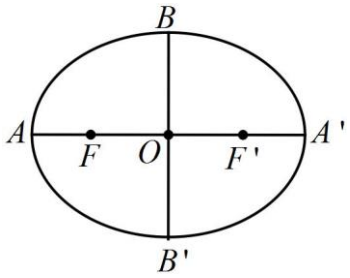
ب) اگر $a = ۶$ باشد ، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.

مثال : خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ و مرکز آن (۱-,۴-) و طول قطر کوچک ۶ است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی

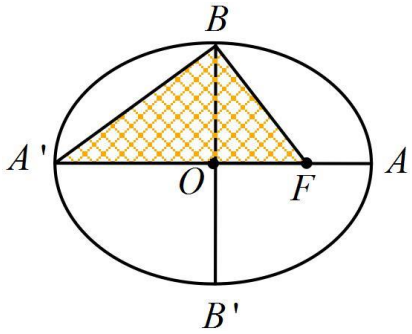
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را بنویسید.

مثال : در بیضی مقابل فاصله کانونی چند است؟ (شهریور۱۴۰۱)



$AA' = ۱۰$ $BB' = ۶$

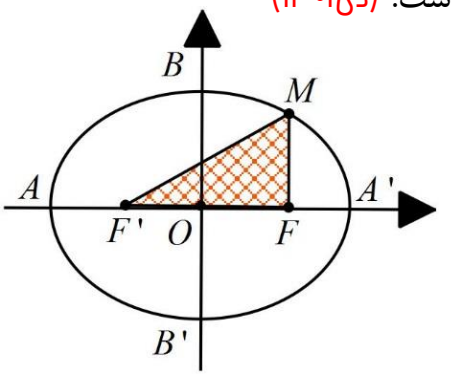
مثال : اگر $AA' = ۱۰$ و $BB' = ۸$ باشد: (خرداد۱۴۰۱)



الف) $A'F$ چند است ؟

ب) مساحت مثلث BFA' چند است؟

مثال : در بیضی مقابل کانون $F'(۴,۰)$ و مختصات راس $B(۰,۳)$ است. (دی۱۴۰۱)



الف) قطر بزرگ بیضی

ب) محیط مثلث MFF' را بدست آورید.

مثال : خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ و مرکز آن $(-۱,-۴)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ است. (دی۱۴۰۰)

الف) فاصله کانونی؟

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را بیابید.

○ ○ دایره ○ ○

$O(\alpha,\beta)$ مرکز و r شعاع دایره

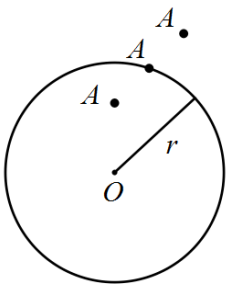
○ ○ معادله استاندارد ○ ○

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

○ ○ معادله گسترده ○ ○

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \quad o\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right) \ , \ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

	شرط دایره بودن $a^2 + b^2 > 4c$ است.	



- اگر نقطه A درون دایره باشد ، فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است.
- اگر نقطه A روی دایره باشد ، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.
- اگر نقطه A خارج از دایره باشد ، فاصله آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

اگر دایره از نقطه ای گذر کند ، آن نقطه در معادله دایره صدق میکند.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

یعنی می توان آن نقطه را به جای x و y در معادله دایره قرار داد. به عبارت دیگر اگر نقطه را در $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2$ قرار دهیم ، حاصل صفر میشود. اگر حاصل مثبت شود ، نقطه **خارج دایره** و اگر منفی شود ، نقطه **داخل دایره** است.

مثال : معادله دایره ای بنویسید که از نقطه $(-3, 1)$ بگذرد و مرکز آن $(-1, 2)$ باشد.

مثال : وضعیت نقاط زیر را با دایره $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ مشخص کنید.

الف) $A(1,1)$

ب) $B(0,3)$

مثال : اگر $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد:

الف) مرکز و شعاع؟

ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور های مختصات ؟

تبدیل فرم گسترده به استاندارد

$$x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$$

$$(x^۲-۶x)+(y^۲+۲y)+۶=۰$$

$$(x-۳)^۲-۹+(y+۱)^۲-۱+۶=۰$$

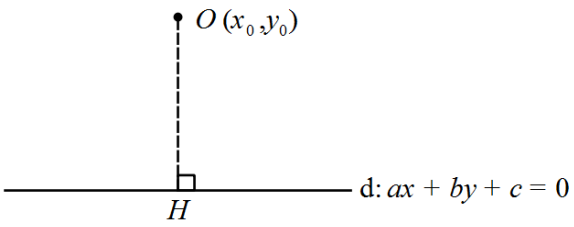
$$(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

مثال : در معادله $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$ مختصات مرکز و شعاع را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

وضعیت نسبی خط و دایره

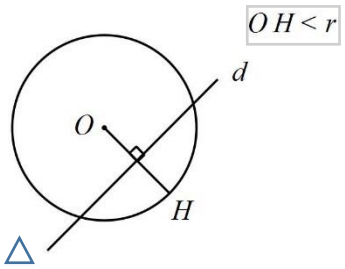
فاصله نقطه o از خط d از فرمول زیر بدست می آید:

$$oH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

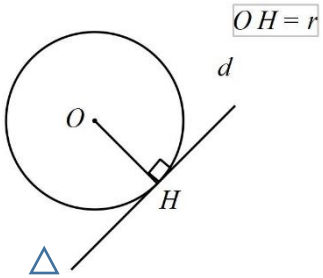


تذکر :

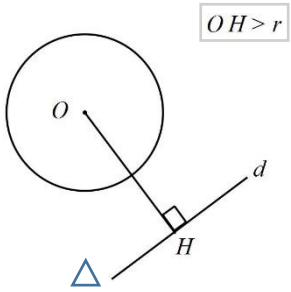
خط مماس در نقطه تماس با دایره بر شعاع دایره عمود است.



معادله تلاقی دایره و خط مثبت است.



معادله تلاقی دایره و خط صفر است.



معادله تلاقی دایره و خط منفی است.

مثال : وضعیت خط $x + y = ۳$ را نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ مشخص کنید.

مثال : وضعیت خط و دایره را مشخص کن.

خط $x + y = ۱$ $\quad$ الف) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۱ = ۰$

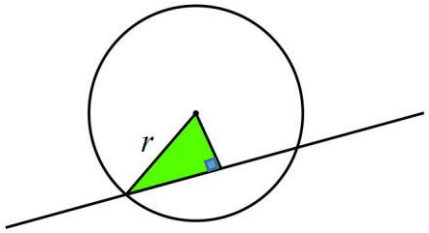
خط $y = -۱$ $\quad$ ب) $(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۴$

خط $y = -x - ۲$ $\quad$ پ) $x^۲ + y^۲ = ۲$

مثال: معادله دایره ای بنویسید که برخط $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ مماس بوده و مرکز آن $c(۱,۲)$ باشد.

تذکر: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود شود آن را نصف میکند.

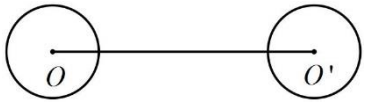
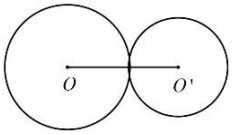
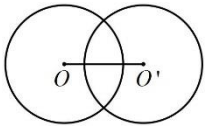
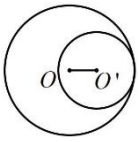
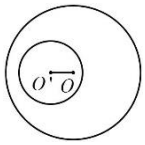
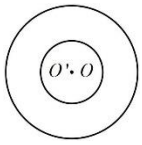
مثال: مرکز دایره ای $O(۲, -۳)$ است. این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله دایره را بنویسید.



مثال: اگر خط L درنقطه $(۳,۴)$ بر دایره به مرکز مبدا مختصات مماس باشد. معادله خط مماس را بنویسید.

وضعیت نسبی دو دایره

پاره خطی که مرکز های دو دایره را به هم وصل میکند ، خط المرکزین نام دارد.

متخارج	$oo' > r + r'$	
مماس بیرون	$oo' = r + r'$	
متقاطع	$r - r' < oo' < r + r'$	
مماس درون	$oo' = r - r'$	
متداخل	$oo' < r - r'$	
هم مرکز	$oo' = ۰$	

مثال : وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y = ۰$$

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۱۲ = ۰$$

مثال : معادله دایره ای بنویسید که بر دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y - ۴ = ۰$ مماس بیرون و مرکز آن $o(۲, -۲)$ باشد.

مثال : وضعیت دو دایره را مشخص کنید.

① $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰$

② $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ و $(x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱$

③ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۹$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$

④ $x^۲ + (y - ۵)^۲ = ۵$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۷$

مثال : معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $(-۱, -۱)$ باشد و با دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس درون باشد.

فصل هفتم - احتمال

افراز ←
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \dots \dots = \emptyset$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \dots \dots = A$$

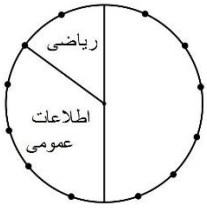
تک تک مجموعه های تهی نباشند و اشتراک نداشته باشند و اجتماع آنها برابر با کل مجموعه شود.

مجموعه اعداد گویا و گنگ ، یک افراز برای اعداد حقیقی است. مجموعه اعداد طبیعی اول و مجموعه اعداد طبیعی مرکب و عدد ۱ ، یک افراز روی اعداد طبیعی هستند.

مثال: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری به نوزاد پسر ۰/۰۸ و به نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد. خانواده‌ای قصد بچه دار شدن دارد. با چه احتمالی نوزاد آنها بیمار خواهد شد ؟

مثال: چهار ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره که ۴ تای آن قرمز است ، در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند، در ظرف سوم ۸ مهره که ۶ تای آن قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب میکنیم و یک مهره خارج می کنیم. احتمال آنکه قرمز باشد ، چند است؟

مثال: سه بسته سوال ادبیات ، ریاضی و اطلاعات عمومی در یک مسابقه داریم. احتمال برد بسته ادبیات ۹۰ درصد ، ریاضی ۶۰ درصد و اطلاعات عمومی ۸۵ درصد است. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سوال مشخص شود ، تعیین کنید فرد با چه احتمالی برنده خواهد شد؟



مثال: دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی دارد. از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم میگذاریم سپس یک مهره از ظرف دوم خارج می کنیم. احتمال اینکه این مهره سبز باشد چقدر است ؟

مثال : دو جعبه داریم درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

مثال : فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد ۵ درصد و ۱ درصد .باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

مثال : یک سکه را پرتاب میکنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب میکنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

مثال : در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوعA، ۲۰ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشند برای نوع A $\frac{۴}{۵}$ برای نوع B $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

مثال : مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند به احتمال ۰/۴۵ اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

مثال : مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۲۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

مثال: در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ داریم. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب داریم. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار میدهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است ؟