

۱-۱- مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n

در لیگ برتر فوتبال ایران در سال ۱۳۹۵، ۱۶ تیم وجود داشت، در نیم فصل اول بازی ها، تعداد کل بازی های انجام شده چه تعداد است؟ می دانیم در این نیم فصل هر تیم ۱۵ بازی انجام داده است. برای آن که تعداد کل بازی ها را بشماریم.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

① تعداد بازی های تیم اول برابر چقدر است؟

② تعداد بازی های تیم دوم به جز بازی با تیم اول برابر چقدر است؟

③ تعداد بازی های تیم سوم به جز بازی با تیم های اول و دوم برابر چقدر است؟

با ادامه روند فوق در می یابیم تعداد بازی های انجام شده برابر است با:

$$۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + \dots + ۳ + ۲ + ۱$$

حال به نظر تان چگونه می توان مجموع فوق را بدست آورد.

بگذارید راه حل جالبی را برایتان پیشنهاد کنم، مجموع فوق را S در نظر بگیرید و آن را به دو صورت زیر بنویسید.

$$\begin{cases} S = ۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + \dots + ۳ + ۲ + ۱ \\ S = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ \end{cases}$$

$$۲S = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + \dots + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ = ۱۵ \times ۱۶$$

از جمع دو تساوی فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$S = ۱۵ \times ۸ = ۱۲۰$$

پس:

بنابراین تعداد بازی ها، ۱۲۰ بازی بوده است.

به همین ترتیب می توان مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به صورت زیر بدست آورد.

$$\begin{cases} S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + ۲ + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$\rightarrow ۲S = n(n+1) \rightarrow S = \frac{n(n+1)}{۲}$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

نتیجه

۲-۱- مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ را در نظر بگیرید. برای آن که مجموع جملات این دنباله را بدست آوریم جاهای خالی را پر کنید.

(۱): $a_1 = a_1$

(۲): $a_2 = a_1 + d$

(۳): $a_3 = \dots + ۲d$

(۴): $a_4 = \dots + \dots$

⋮

(n): $a_n = a_1 + (\dots - \dots)d$

اگر طرفین تساوی های بالا را با هم جمع کنیم، داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dots a_1 + (\dots)d$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = na_1 + \dots d = \frac{n}{۲} (\dots + (n-1) \dots) \quad \text{با توجه به تساوی } ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{۲} \text{ داریم}$$

اگر در دنباله حسابی a_1, a_2, \dots, a_n مجموع n جمله اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مثال ۱: هر یک از مجموع‌های زیر را برحسب a_1 و d بنویسید.

الف $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{51} =$

ب $a_1 + a_2 + \dots + a_{36} =$

پاسخ:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{51} \stackrel{n=51}{=} \frac{51(2a_1 + (51-1)d)}{2} = \frac{51(2a_1 + 50d)}{2}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{36} \stackrel{n=36}{=} \frac{36(2a_1 + (36-1)d)}{2} = \frac{36(\dots + \dots)}{2}$$

۱) $S_{10} = \dots(2a_1 + \dots d)$

۲) $S_{12} = 12a_{10}$

۳) $2a_1 + 2vd = \frac{1}{19} S_{\dots}$

۴) $a_{10} = \frac{1}{9} S_{\dots}$

۱) $S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) = 5(2a_1 + 9d)$

پاسخ:

۲) $S_{12} = \frac{12}{2}(2a_1 + (12-1)d) = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = \frac{12}{2} \times 2(a_1 + 11d) = 12(a_1 + 11d) \xrightarrow{a_{12} = a_1 + 11d} S_{12} = 12a_{12}$

۳) $2a_1 + 2vd = 2a_1 + (2v-1)d = \frac{2}{2v-1} \times \frac{2v-1}{2}(2a_1 + (2v-1)d) = \frac{2}{2v-1} \left(\frac{2v-1}{2}(2a_1 + (2v-1)d) \right) = \frac{1}{19} S_{\dots}$

۴) $a_{10} = (a_1 + 9d) = \frac{2}{2} (a_1 + 9d) = \frac{1}{2} (2a_1 + 18d) = \frac{1}{2} (2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} (2a_1 + (9-1)d)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} (2a_1 + (9-1)d) = \frac{1}{9} S_{\dots}$

مثال ۳: در دنباله $7, 9, 11, \dots$ مجموع بیست جمله اول دنباله را پیدا کنید.

پاسخ:

$a_2 = 9, a_1 = 7 \rightarrow a_2 - a_1 = 9 - 7 = 2$

$a_3 = 11, a_2 = 9 \rightarrow a_3 - a_2 = 11 - 9 = 2$

$a_1 = 7, d = 2$

$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \times 7 + (20-1) \times 2) = \dots(\dots + \dots) = \dots$

مثال ۴: در یک دنباله جمله اول ۴ و $a_{n+1} = a_n + 5$ ، مجموع ۸ جمله اول آن کدام است؟

۱۷۴ (۴)

۱۶۸ (۳)

۱۷۲ (۲)

۱۷۰ (۱)

پاسخ: با توجه به تساوی $a_{n+1} = a_n + 5$ واضح است که این دنباله حسابی است چون اگر به هر جمله ۵ واحد اضافه کنیم جمله بعدی ساخته می‌شود و این یعنی $d = 5$ است.

$S_8 = \frac{8}{2} (2 \times 4 + (8-1) \times 5) = \dots(8 + 35) = \dots$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۵: در یک دنباله حسابی جملات پنجم و نهم به ترتیب ۱ و ۷ است. مجموع دوازده جمله اول آن را بیابید.

$$\begin{cases} a_5 = 1 \rightarrow a_n = a_1 + 4d = 1 \\ a_9 = 7 \rightarrow a_1 = \dots, d = \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2 \times \dots + (12-1) \dots) = \dots$$

مثال ۶: اگر به یک دنباله عددی ۲ واحد اضافه شود به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر اضافه می‌شود؟

$S_{20} = \dots$ تعداد (20) جمله اول: دنباله اولیه

$S'_{20} = \dots$ تعداد (20) جمله اول: دنباله ثانویه

$$\rightarrow S'_{20} - S_{20} = (\dots) - (\dots) = \dots$$

تکنه: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = An^2 + Bn$ بدست می‌آید که در آن، جمله اول $A+B$ و قدرنسبت دنباله $d = 2A$ است.

مثال ۷: در دنباله حسابی $5, 7, 9, \dots$ مجموع n جمله اول را بیابید.

$$a_1 = 5, a_2 = 7 \rightarrow d = a_2 - a_1 = \dots$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2(5) + (n-1) \dots) \rightarrow S_n = \dots$$

مثال ۸: در دنباله حسابی $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

تکنه: ابتدا مجموع n جمله اول این دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_1 = 1, a_2 = 4 \rightarrow d = a_2 - a_1 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2 \times 1 + (n-1) \times 3) = \frac{n}{2} (3n - 1) = \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

برای آن که بفهمیم حداقل چند جمله از این دنباله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود کافی است $S_n > 200$ قرار دهیم و حداقل مقدار n را بیابیم:

$$S_n > 200 \rightarrow 2n^2 > 200 \rightarrow n^2 > 100 \rightarrow n > 10$$

پس اگر حداقل ۱۱ جمله از این دنباله را باهم جمع کنیم مجموع آن‌ها بیشتر از ۲۰۰ می‌شود.

تکنه: در هر دنباله اگر a_n جمله عمومی و S_n مجموع n جمله اول باشد. آن‌گاه،

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

مثال ۹: اگر در یک دنباله حسابی $S_n = n^2 - n$ باشد. جمله عمومی دنباله را بیابید.

تکنه: این سؤال را از دو روش به کمک هم حل می‌کنیم:

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$$

روش اول:

$$a_1 + a_2 = S_2 = 2^2 - 2 = 2 \xrightarrow{a_1=0} a_2 = 2 \rightarrow a_2 = 2$$

$$d = a_2 - a_1 = \dots \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - ((n-1)^2 - (n-1)) = n^2 - n - (n^2 - 2n + 1 - n + 1) = \dots$$

روش دوم:

مثال ۱۰: جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$a_1 + a_{10} + a_{11} = S_{\dots} - S_{\dots}$$

پاسخ: می دانیم که:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{11} \xrightarrow{\text{کم شود}} a_1 + a_{10} + a_{11} = S_{\dots} - S_{\dots} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 = S_8 \end{cases}$$

مثال ۱۱: مجموع n جمله اول یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات دنباله با شروع از جمله

(سراسری ریاضی فارغ از کشور ۹۰)

مفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

$$9(1) \quad 29(2) \quad 3(3) \quad 18(4)$$

پاسخ: با توجه به مثال ۱۰ می توان نتیجه گرفت که:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_6 \rightarrow \begin{cases} S_{18} = \frac{18(18-15)}{6} = \frac{18 \times 3}{6} = 9 \\ S_6 = \frac{6(6-15)}{6} = \frac{-6 \times 9}{6} = -9 \end{cases}$$

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = 9 - (-9) = \dots\dots$$

بنابراین

پس گزینه صحیح است.

$$S_n = \frac{n}{r}(a_1 + a_n)$$

نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه رویه رو بدست می آید.

مثال ۱۲: جملات دنباله ۲, ۵, ۸, ..., ۱۴۹ را در نظر بگیرید.

ب مجموع جملات این دنباله را بدست آورید.

الف دنباله فوق چند جمله دارد؟

پاسخ:

الف می دانیم جمله اول $a_1 = 2$ و جمله آخر (شماره جمله را نمی دانیم) $a_n = 149$ و قدرنسبت این دنباله حسابی برابر $d = 3$ پس داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 149 = 2 + (n-1) \times 3 \rightarrow 149 = 2 + 3n - 3 \rightarrow 3n - 1 = 149 \rightarrow 3n = 150 \rightarrow n = 50$$

پس این دنباله ۵۰ جمله دارد.

$$S_{50} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) = \dots\dots$$

ب

مثال ۱۳: جملات دنباله حسابی $\dots, -21, x, -27$ مفروض است.

ب این دنباله چند جمله منفی دارد؟

الف قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

ت مجموع جملات منفی را بیابید.

ب بزرگترین جمله منفی آن چقدر است؟

پاسخ:

الف

$$a_1 = -27$$

$$a_3 = -21 \rightarrow a_3 = a_1 + 2d \rightarrow -27 + 2d = -21 \rightarrow 2d = 6 \rightarrow d = 3 \rightarrow$$

ب برای پیدا کردن تعداد جمله منفی. کافی است $a_n < 0$ در نظر بگیریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1 = -27, d = 3} -27 + (n-1) \times 3 < 0 \rightarrow 3n - 2 < 27 \rightarrow 3n < 29 \rightarrow n < 10$$

۹ جمله ی منفی دارد

$$a_4 = a_1 + 3d = \dots\dots\dots$$

ب) با توجه به قسمت ب واضح است که بزرگ‌ترین جمله منفی دنباله جمله نهم آن است.

$$S_4 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4) = \dots\dots\dots$$

توجه: در یک دنباله حسابی یا جمله اول a و جمله آخر b و قدرنسبت d ، تعداد جملات از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1$$

مثال ۱۴: هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف $A = \{a_3, a_5, a_7, \dots, a_{37}\}$

ب $B = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{42}\}$

پاسخ:

الف) تعداد اعضای مجموعه A با تعداد اعضای دنباله $3, 5, 7, \dots, 37$ یکسان است و چون این دنباله حسابی با جمله اول 3 و قدرنسبت 2 جمله

$$n = \frac{37-3}{2} + 1 = \frac{34}{2} + 1 = 17 + 1 = 18$$

آخر 37 است. طبق نکته تعداد این جملات برابر است با:

ب)

مثال ۱۵: اگر a_1, a_2, a_3, \dots جملات یک دنباله حسابی باشند.

الف) آیا دنباله $a_3, a_5, a_7, \dots, a_{47}$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند چرا؟

ب) تعداد جملات بالا چقدر است؟

پ) مجموع $a_3 + a_5 + \dots + a_{47}$ را بدست آورید.

ت) مجموع $a_3 + a_5 + \dots + a_{47}$ را برحسب S_{49} چقدر است؟

پاسخ:

الف) بله، زیرا فاصله بین جملات یکسان است.

$$n = \frac{47-3}{2} + 1 = \frac{44}{2} + 1 = 22 + 1 = 23$$

ب) جملات a_3, a_5, \dots, a_{47} یک دنباله حسابی است که جمله اول آن a_3 و تعداد آن 23 تا و جمله آخر آن a_{47} است پس مجموع آن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$S = \frac{23}{2}(a_3 + a_{47}) = \frac{23}{2}(a_1 + 2d + a_1 + 44d) \rightarrow S = \frac{23}{2}(2a_1 + 46d)$$

$$S = \frac{23}{2}(2a_1 + 46d) \quad (1)$$

ت) در قسمت ب در محاسبه مقدار S به رابطه رویه‌رو رسیدیم:

$$S_{49} = \frac{49}{2}(2a_1 + 46d) \quad (2)$$

از طرفی داریم:

با تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) داریم:

$$\frac{S}{S_{49}} = \frac{23}{49} \rightarrow S = \frac{23}{49} S_{49}$$

مثال ۱۶: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 + n$ است حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_{19}$ چقدر است؟

$$25000 \quad (4)$$

$$9900 \quad (3)$$

$$2500 \quad (2)$$

$$5000 \quad (1)$$

بناست: جملات دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}$ یک دنباله حسابی بوده با جمله اول a_1 و جمله آخر a_{99} و تعداد آن $n = \frac{99-1}{2} + 1 = 50$ پس داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \frac{\Delta^{\circ}}{2} (a_1 + a_{99}) = \frac{\Delta^{\circ}}{2} (a_1 + a_1 + 98d) = \frac{\Delta^{\circ}}{99} \times \frac{99}{2} (2a_1 + 98d) = \frac{\Delta^{\circ}}{99} S_{99}, S_{99} = 99^2 + 99 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \frac{\Delta^{\circ}}{99} (99^2 + 99) = \frac{\Delta^{\circ}}{99} \times 99 \times (99 + 1) = 50 \times 100 = 5000$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تکنه: هرگاه $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ تا واسطه حسابی بین دو عدد a و b باشد. مجموع این واسطه‌ها از رابطه زیر بدست

$$S = x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2} (a + b)$$

می‌آید:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= \frac{n}{2} (x_1 + x_n) \\ &= \frac{n}{2} (a + d) + \frac{n}{2} (b - d) \\ &= \frac{n}{2} (a + b) \end{aligned}$$

انبار:

مثال ۱۷: بین دو عدد ۳ و ۸۷، ۲۲ تا واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

بناست: اگر $a = 3$ و $b = 87$ در نظر بگیریم و x_1, \dots, x_{22} واسطه‌های حسابی بین ۳ و ۸۷ باشد در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{22} = \frac{22}{2} (3 + 87) = \frac{22 \times 90}{2} = \dots$$

مثال ۱۸:

الف چند عدد سه رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد.

ب مجموع این اعداد چقدر است؟

بناست:

الف کوچک‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵ برابر ۱۰۵، ۱۵ و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۵ برابر ۹۹۰ می‌باشد. پس دنباله $105, \dots, 990$ یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۰۵ و جمله آخر ۹۹۰ و قدرنسبت ۱۵ است. که تعداد جملات این دنباله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \rightarrow n = \frac{990 - 105}{15} + 1 \rightarrow n = 59 + 1 = 60$$

$$S_{60} = \frac{60}{2} (105 + 990) = \dots$$

ب در این دنباله $a_1 = 105$ و $a_{60} = 990$ و $n = 60$ پس:

مثال ۱۹: یک در یک دنباله عددی $a_n = \frac{2}{3}n - 5$ مجموع ده جمله دوم (جمله یازدهم تا بیستم) از مجموع ده جمله اول چقدر بیشتر است؟

بناست:

$$(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = \frac{10}{3} (a_{11} + a_{20}) - \frac{10}{3} (a_1 + a_{10}) = \dots$$

تکنه: اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی مختلف باشند به طوری که $m + n = p + q$ و $\{a_k\}$ جملات یک دنباله حسابی در

این صورت $a_m + a_n = a_p + a_q$



مسئله ۳: در ۱۰۰ جمله اول یک دنباله حسابی اگر مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر ۳۰۰۰ باشد، حاصل جمع تمام جملات چندر است؟

$$10000 (۴)$$

$$5000 (۳)$$

$$500 (۲)$$

$$5000 (۱)$$

پاسخ:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_{98} + a_{99} + a_{100}) = 3000 \rightarrow (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) = 3000$$

$$\frac{a_2 + a_{99} = a_1 + a_{100}}{a_3 + a_{98} = a_1 + a_{100}} \rightarrow 2(a_1 + a_{100}) = 3000 \rightarrow a_1 + a_{100} = 1500 \quad *$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} (a_1 + a_{100}) = \frac{100}{2} \times 1500 = 75000$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۱-۳- مجموع جملات دنباله هندسی

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌اش را تعیین کند. مخترع شطرنج گفت شطرنج ۶۴ خانه دارد، در خانه اول ۱ گندم و در خانه دوم ۲ گندم و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار دهید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر گندم یک گرم باشد، پادشاه چند گرم گندم باید به مخترع شطرنج بدهد. طبق گفته مخترع شطرنج، جدول زیر را کامل کنید.

شماره خانه	۱	۲	۳	۴	۵	۶۴
تعداد گندم	۱	۲	۴

برای این که بفهمیم چند گرم گندم باید پادشاه به مخترع شطرنج بدهد کافی است مجموع اعداد زیر را حساب کنیم:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{62}$$

به نظر آن‌ها چگونه می‌توان مجموع فوق را بدست آورد.

یک راه جالب برای این مسئله وجود دارد و آن این است که ابتدا مجموع داده شده را برابر S بگیریم و سپس به صورت زیر عمل کنیم:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{63} \xrightarrow{\text{طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم}} 2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{64}$$

از تفریق دو تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$2S - S = (2 + 4 + 8 + 16 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{64}) - (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + \dots + 2^{62} + 2^{63}) \rightarrow S = 2^{64} - 1$$

حال می‌خواهیم با این ایده جالب در این بخش مجموع n جمله اول هر دنباله هندسی را بدست آوریم:

دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n مفروض است یا توجه به این که در دنباله هندسی جمله عمومی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است (که در آن a_1 جمله اول و q قدرنسبت است). می‌توانیم مجموع n جمله اول را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (۱)$$

با ضرب طرفین تساوی (۱) در q داریم:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (۲)$$

از تفریق دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_n - qS_n = a_1 - \dots$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - \dots)}{1 - q}$$

اگر در دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ مجموع n جمله اول را با S_n نمایش دهیم، داریم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال ۲۱: در دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots هر یک از مجموع‌های زیر را بر حسب a_1 و q بدست آورید.

الف $a_1 + a_2 + \dots + a_{37}$

ب $a_1 + a_2 + \dots + a_{\Delta 6}$

پاسخ:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{37} = S_{37} = \frac{a_1(1-q^{37})}{1-q}$$

الف

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{\Delta 6} = S_{\Delta 6} = \frac{a_1(1-q^{\Delta 6})}{1-q}$$

ب

مثال ۲۲: مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ را بیابید.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = \dots$$

پاسخ: در دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ قدرنسبت به صورت روبرو بدست می‌آید:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \dots$$

پس مجموع 10 جمله اول این دنباله برابر است با:

مثال ۲۳: مجموع شش جمله اول دنباله هندسی $a_n = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ چقدر است؟

پاسخ: در این دنباله جمله اول و قدرنسبت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n=1} a_1 = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -6$$

$$a_n = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n=2} a_2 = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \dots$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \dots$$

مثال ۲۴: در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر 12 و جمله هفتم 32 برابر جمله دوم است. مجموع 7 جمله اول کدام است؟

$$2(3^7 - 1) \quad 2(1 - 3^7) \quad 3(2^7 - 1) \quad 3(1 - 2^7)$$

$$a_3 = 32a_2 \xrightarrow{\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1q^2}{a_1q}} \frac{a_1q^2}{a_1q} = 32 \frac{a_1q}{a_1q} \rightarrow q^2 = 32 \rightarrow q = \dots$$

پاسخ: باتوجه به صورت مسئله داریم:

$$a_3 = 12 \rightarrow a_1q^2 = 12 \rightarrow a_1(\dots)^2 = 12 \rightarrow a_1 = \dots$$

از طرفی جمله سوم این دنباله برابر 12 است. پس:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \dots$$

بنابراین:

پس گزینه صحیح است.

مثال ۲۵: حداکثر چند جمله ابتدایی دنباله $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ را با هم جمع کنیم تا حاصل کمتر از $1/497$ شود.

پاسخ: در این دنباله هندسی که جمله اول آن $a_1 = 1$ و قدرنسبت آن $q = \frac{1}{3}$ است، برای آن که بفهمیم حداکثر مجموع چند جمله ابتدایی کمتر از $1/497$ است کافی است $S_n < 1/497$ قرار دهیم بنابراین:

$$S_n < 1/497 \rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} < 1/497 \rightarrow \frac{1(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} < 1/497 \rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n < \frac{2}{3} \times 1/497$$

$$\rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n < 0.998 \rightarrow (\frac{1}{3})^n > 0.002 \rightarrow 3^n < \frac{1000}{2} = 500 \rightarrow n \leq 5$$

مثال ۲۶: مجموع چند جمله از دنباله $3, -9, 27, \dots$ برابر 183 است؟

پاسخ:

دنباله داده شده یک دنباله هندسی است که در آن $a_1 = 3$ و $q = -3$ ، از طرفی مجموع چند جمله ابتدایی آن $S_n = 183$ است. حال ما به دنبال پیدا کردن تعداد این جملات (یعنی n) هستیم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad S_n = 183 \rightarrow 183 = \frac{3(1-(-3)^n)}{1-(-3)} \rightarrow 183 = \frac{3(1-(-3)^n)}{4}$$

$$\rightarrow 1-(-3)^n = 61 \times 4 \rightarrow 1-(-3)^n = 244 \rightarrow -(-3)^n = 243 \rightarrow (-3)^n = -243 \rightarrow n = 5$$

مثال ۲۷: در دنباله هندسی غیرنزولی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ مجموع دوازده جمله اول کدام است؟

$$\frac{4((\frac{1}{2})^{12}) - 1}{\frac{1}{2}} \quad \frac{4(1 - (\frac{1}{2})^{12})}{\frac{1}{2}} \quad 4((\frac{1}{2})^{12} - 1) \quad 4(1 - (\frac{1}{2})^{12})$$

پاسخ:

$$a_1 = 2$$

$$a_r = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 q^{r-1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2q^{r-1} = \frac{1}{2} \rightarrow q^{r-1} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_{12} = \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = \dots$$

چون دنباله هندسی غیرنزولی است، پس $q = \dots$ قابل قبول است. بنابراین:

پس گزینه صحیح است.

دکته: مجموع n جمله اول دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n را می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

مثال ۲۸: بین دو عدد ۱ و ۸۱ چند واسطه هندسی درج کنیم تا مجموع جملات دنباله هندسی حاصل برابر ۱۲۱ شود.

پاسخ: در دنباله داده شده داریم: $a_1 = 1, a_n = 81$ ، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \rightarrow 121 = \frac{1 - 81q}{1 - q} \rightarrow 121(1 - q) = 1 - 81q \rightarrow 121 - 121q = 1 - 81q$$

$$\rightarrow -121q + 81q = 1 - 121 \rightarrow -40q = -120 \rightarrow q = 3$$

بنابراین دنباله به صورت $1, 3, 9, 27, 81$ است پس بین 1 و 81 سه واسطه هندسی یا شرایط فوق می‌توان درج کرد.

مثال ۲۹: در یک دنباله هندسی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 2(2^n - 1)$ بدست می‌آید. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

۱۹۲ (۴)

۱۲۸ (۳)

۶۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: به دو رابطه زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 = S_7 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_6 = S_6 \end{cases} \rightarrow a_7 = S_7 - S_6$$

حال با توجه به رابطه $S_n = 2(2^n - 1)$ جمله هفتم را بدست می‌آوریم:

$$S_7 = 2(2^7 - 1) = 2(127) = 254 \rightarrow a_7 = \dots$$

$$S_6 = 2(2^6 - 1) = 2(63) = 126$$

پس گزینه صحیح است.

مثال ۳۰: جاهای خالی را پر کنید. (a_n ها جملات دنباله هندسی هستند.)

الف $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{27} = S_{\dots} - S_{\dots}$

ب $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{27} = \frac{a_{\dots}(1 - q^{\dots})}{1 - q}$

پاسخ:

الف $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{27} = S_{27} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_6 = S_6 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم شود}} a_7 + a_8 + \dots + a_{27} = S_{\dots} - S_{\dots}$

ب جمله اول این مجموع a_7 و قدر نسبت q و تعداد جملات $n = 21$ است، بنابراین:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{27} = \frac{a_7(1 - q^{21})}{1 - q}$$

مثال ۳۱: در یک دنباله هندسی که ۱۱ جمله دارد، اگر مجموع ۶ جمله اول آن ۶۳ و مجموع ۶ جمله آخر آن ۲۰۱۶ باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

الف $a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 = 63 \rightarrow S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = 63$ (۱)

ب $a_6 + a_7 + \dots + a_{11} + a_{11} = 2016 \rightarrow \frac{a_6(1 - q^6)}{1 - q} = 2016$ (۲)

$$\frac{a_6(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2016}{63} \rightarrow \frac{a_6}{a_1} \rightarrow \frac{a_1 q^5}{a_1} \rightarrow q^5 = \dots \rightarrow q = \dots$$

پس گزینه صحیح است.

مسئله ۳۲: اگر a_n ها جملات دنباله هندسی باشند، جاهای خالی را پر کنید.

الف $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{21} = \frac{a_1(1-q^{21})}{1-q}$

ب $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{21}^2 = \frac{a_1^2(1-q^{21})}{1-q^2}$

پاسخ:

الف مجموع داده شده، مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q است، که تعداد جملات آن $n = 21$ است.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{21} = \frac{a_1(1-q^{21})}{1-q} = \dots$$

ب مجموع داده شده، مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول a_1^2 و قدرنسبت q^2 است که تعداد جملات آن $n = 21$ است. بنابراین:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{21}^2 = \frac{a_1^2(1-q^{21})}{1-q^2} = \dots$$

مسئله ۳۳: در 20 جمله ابتدایی از یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{4}{3}$ ، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر

2 است. مجموع 5 جمله اول این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = \frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q^2} \quad (1)$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{a_2(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_2(1-q^{20})}{1-q^2} \quad (2)$$

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}}{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}} = \frac{a_1(1-q^{20})}{a_2(1-q^{20})} = \frac{a_1}{a_2} = 2 \rightarrow q = 2$$

با توجه به فرض مسئله داریم که:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \dots$$

بنابراین مجموع 5 جمله اول این دنباله برابر است با:

نکته: در یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q داریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n + q^{2n}$$

مسئله ۳۴: در یک دنباله هندسی مجموع 3 جمله اول 112 و مجموع 6 جمله اول 126 است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = 112$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S_6 = 126 \quad \xrightarrow{\text{طبق نکته قبل}} \frac{S_6}{S_3} = \frac{S_3 + S_3}{S_3} = 1 + q^3 \rightarrow 1 + q^3 = \frac{126}{112}$$

$$q^3 = \frac{126}{112} - 1 = \frac{14}{112} = \frac{1}{8} \rightarrow q = \dots$$

مثال ۳۵: اگر n عددی فرد باشد، با استفاده از مجموع جملات در دنباله هندسی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} - \dots + a^2 - a + 1)$$

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{n-2} - a^{n-1} + a^n$$

پاسخ: عبارت روبه‌رو را در نظر بگیرید:

مجموع عبارت بالا را می‌توان مجموع یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-a)$ در نظر گرفت پس داریم:

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{n-2} - a^{n-1} + a^n = \frac{1(1 - (-a)^n)}{1 - (-a)} = \frac{1(1 + a^n)}{1 + a}$$

$$\frac{1 - a + a^2 - \dots + a^{n-2} - a^{n-1} + a^n}{1 + a} = 1 + a^n$$

۱, ۱۱, ۱۱۱, ...

مثال ۳۶: مجموع n جمله اول دنباله روبه‌رو را تعیین کنید.

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \frac{111\dots 1}{1 \text{ تا } n} \times 9 \rightarrow 9S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + \frac{999\dots 9}{9 \text{ تا } n}$$

پاسخ:

$$9S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$9S = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$9S = (10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n$$

$$9S = \frac{10(1 - (10)^n)}{-9} - n = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9} \rightarrow S = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$$

نکته: اگر m, n, p, q چهار عدد طبیعی باشد به طوری که $m + n = p + q$ و $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ در این صورت:

$$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$$

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_4 = ?$$

مثال ۳۷: اگر جمله ی پنجم یک دنباله هندسی ۲ باشد، حاصل ضرب روبه‌رو را بیابید.

$$a_1 a_4 = a_2 a_3 = a_3 a_4 = a_4 a_5 = a_5 a_6 = (a_5)^2$$

پاسخ: طبق نکته قبل می‌توان نوشت:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_4 = (a_2)^4 \cdot a_5 = a_5^4 = 2^4 = 16$$

پس داریم:

مثال ۳۸: برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است. که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها

یک چهارم می‌شود حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد؟

پاسخ: پس از عبور از هر لایه شدت تابش یک چهارم می‌شود پس دنباله زیر میزان کاهش شدت تابش در هر مرحله است:

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \dots$$

برای آنکه بفهمیم حداقل از چند لایه استفاده کنیم باید در دنباله فوق S_n را بزرگتر از $\frac{96}{100}$ قرار دهیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \rightarrow \frac{a_1 = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \rightarrow \frac{\frac{3}{4}(1 - (\frac{1}{4})^n)}{\frac{3}{4}} > \frac{96}{100} \rightarrow 1 - (\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100}$$

$$\rightarrow -(\frac{1}{4})^n > \frac{96}{100} - 1 = -\frac{4}{100} \rightarrow (\frac{1}{4})^n < \frac{4}{100} \rightarrow 4^n > 25 \rightarrow n \geq 3$$

پس حداقل باید از سه لایه استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۶ درصد کاهش یابد.

$$S_n < \frac{a_1}{1-q}$$

نکته: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت و قدر نسبت بین ۰ و ۱ داریم:

مثال ۳۹: احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او در روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. آیا احمد می‌تواند بعد از مدتی ۱۰۰/۰۰۰ تومان جمع کند.

پاسخ:

$$\begin{array}{cccc} \text{روز اول} & \text{روز دوم} & \text{روز سوم} & \dots \\ 1000 & , \quad \frac{99}{100} \times 1000 & , \quad \left(\frac{99}{100}\right)^2 \times 1000 & \dots \end{array}$$

حال مجموع پول‌های احمد را در n روز حساب می‌کنیم. دنباله فوق یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۰۰۰ و قدرنسبت $\frac{99}{100}$ است. پس طبق نکته

$$\text{قبل } S_n < \frac{a_1}{1-q} \text{ پس داریم:}$$

$$S_n < \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n < \frac{1000}{1-\frac{99}{100}} = \frac{1000}{\frac{1}{100}} = 100000$$

بنابراین هر چند روز که احمد بدین شکل پول خود را در صندوق اضافه کند پول وی به ۱۰۰۰۰۰ نمی‌تواند برسد.



- ۱- بر محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می‌کنیم تعداد کل وترهای متمایز را بدست آورید.
- ۲- یک ساعت دیواری رأس ساعت به تعداد همان ساعت زنگ می‌زند، علاوه بر آن هر نیم ساعت نیز یک بار زنگ می‌زند این ساعت در شبانه‌روز چند بار زنگ می‌زند.
- ۳- در اعداد طبیعی از ۱ تا چه عددی را به‌طور متوالی باهم جمع کنیم تا حاصل $\frac{5}{9}$ مربع همان عدد شود.
- ۴- مجموع $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ را بدست آورید.
- ۵- حاصل $1 + 1 + 3 + 3 + 5 + \dots + 37 + 38 + 39 + \dots$ را بدست آورید.
- ۶- مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله $3, 7, 11, \dots$ را بدست آورید.
- ۷- در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۳ و هر جمله از جمله ما قبل آن $\frac{1}{4}$ کمتر است، مجموع ۱۰ جمله اول آن را بیابید.
- ۸- در یک دنباله حسابی جمله اول و قدرنسبت باهم برابرند. اگر جمله ششم ۳۰ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول آن را بیابید.
- ۹- اگر مجموع سه جمله اول، ۹ برابر قدرنسبت باشد، مجموع یازده جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟
- ۱۰- اگر در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول ۲۳ و مجموع هفت جمله اول $\frac{287}{5}$ باشد، قدرنسبت چقدر است؟
- ۱۱- در یک دنباله عددی به جمله اول ۴ واحد و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم به مجموع ۱۰ جمله اول چقدر اضافه خواهد شد؟
- ۱۲- در یک دنباله حسابی مجموع ۷ جمله اول برابر مجموع ۲۳ جمله اول آن است، مجموع ۳۰ جمله اول را بیابید.
- ۱۳- در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 2n$ ، مجموع جملات چهارم و پنجم را بیابید.
- ۱۴- مجموع چند جمله از دنباله $2, 6, 10, \dots$ برابر جمله سیزدهم است.
- ۱۵- در دنباله حسابی $2, 1, 4, 7, \dots$ حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل ۳ رقمی شود.
- ۱۶- در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم چقدر است؟
- ۱۷- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی $a, 2a + 1, 3a + 2, \dots$ برابر ۱۵۵ است. جمله هفتم این دنباله چقدر است؟
- ۱۸- مجموع اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ که بر ۳ بخش‌پذیرند را بیابید.
- ۱۹- در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{3}{4}n - 2$ مجموع جملات متوالی شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام را بیابید.
- ۲۰- در یک دنباله عددی که دارای ۱۷ جمله است. جمله نهم برابر ۸ است. مجموع جملات این دنباله چقدر است؟
- ۲۱- در یک دنباله حسابی $a_7 + a_{16} = 42$ است مجموع ۲۲ جمله اول این دنباله را بیابید.
- ۲۲- مجموع همه عددهای صحیح بین ۲۰ و ۱۲۰۰ مختوم به رقم ۵ چقدر است؟
- ۲۳- اگر در یک دنباله حسابی جمله اول n و جمله آخر ۱۳۲ن و مجموع جملات آن ۴۹۸ باشد، تعداد جملات را بیابید.
- ۲۴- در یک دنباله عددی $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$ مقدار S_{13} چقدر است؟
- ۲۵- مجموع اعداد دو رقمی، که در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده ۴ دارند را بیابید.
- ۲۶- اگر مجموع اولین n عدد فرد ۴۴۱۰ باشد، n چقدر است؟
- ۲۷- بین ۱ و ۸۱ چند جمله درج شود تا مجموع جمله‌های دنباله حسابی برابر ۲۴۶ گردد.
- ۲۸- جمله هفتم از یک دنباله حسابی ۲۷ و مجموع بیست‌ویک جمله اول این دنباله ۹۰۳ است، مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بدست آورید.

۲۹- در دو دنباله حسابی $\{4, 7, 10, \dots\}$ و $\{1, 5, 9, \dots\}$ مجموع جملات مشترک کوچکتر از ۱۰۰ را بیابید.

۳۰- اگر در یک دنباله حسابی $S_5 = 6$ و $S_8 = 54$ قدرنسبت چقدر است؟

۳۱- مجموع چند جمله دنباله هندسی $6, 12, 24, \dots$ برابر ۳۷۸ است؟

۳۲- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ است. مجموع شش جمله اول آن را بیابید.

۳۳- مجموع چند جمله‌ی دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر 1026 است؟

۳۴- در یک دنباله هندسی جمله اول ۳ و جمله ششم ۹۶ است. مجموع پنج جمله اول دنباله را بیابید.

۳۵- اگر $2x - 2, x + 2, x + 2, x + 2, x + 2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مجموع هشت جمله بعدی را بدست آورید.

۳۶- حاصل ضرب زیر را به ازای $x = \sqrt{2}$ بدست آورید.

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^7)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^7)$$

۳۷- مجموع 100 جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ چند برابر مجموع جملات ردیف فرد آن 100 جمله است؟

۳۸- اگر مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی 63 و مجموع سه جمله اول آن 7 باشد، جمله ششم چند برابر جمله دوم است؟

۳۹- در یک دنباله هندسی $S_n = \frac{2^n - 1}{5}$ جمله عمومی دنباله را بیابید.

۴۰- در یک دنباله هندسی صعودی، نسبت مجموع هر سه جمله متوالی به اولین جمله در بین آن سه، دو برابر مجذور قدرنسبت است. قدرنسبت را بیابید.

۴۱- در یک دنباله هندسی نزولی با جمله اول ۲ مجموع چهار جمله دوم $\frac{1}{16}$ مجموع چهار جمله اول آن است. مجموع ۸ جمله اول این دنباله را بیابید.

۴۲- دنباله هندسی $4, a, 1, b, \dots$ غیرنزولی است. مجموع چند جمله اول آن برابر $\frac{21}{8}$ است.

۴۳- در یک دنباله هندسی صعودی اگر مجموع سه جمله دوم تا چهارم برابر ۳ و مجموع سه جمله چهارم تا ششم برابر ۲۴۳ باشد. جمله شانزدهم چند برابر جمله هفتم است.

۴۴- حاصل ضرب ۵ جمله اول دنباله هندسی به صورت $2^5 \times 3^{10}$ است. جمله سوم را بیابید.

۴۵- در یک دنباله هندسی با تعداد جملات فرد ثابت کنید حاصل ضرب جملات برابر است جمله وسط به توان تعداد جملات.

۴۶- مجموع ده جمله اول دنباله $5, 55, 555, \dots$ را بیابید.

۴۷- ثابت کنید هر تعداد از اعداد دنباله زیر را در هم ضرب کنیم حاصل ۲ نمی شود.

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots$$

۴۸- جمله عمومی یک دنباله به صورت $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ حاصل $\frac{a_2}{a_1}$ چقدر است؟

۴۹- در یک دنباله هندسی اگر تمام جملات را معکوس کنیم مجموع ۱۰ جمله اول نصف می شود. در این دنباله حاصل ضرب ده جمله اول چقدر است؟

۵۰- تویی را از زمین به هوا پرتاب می کنیم تا به ارتفاع ۶ متری برسد بعد از هر بار به زمین خوردن به اندازه ۲۰ درصد ارتفاع قبلی بالاتر می رود. نشان دهید پس از شروع پرتاب مسافت طی شده کمتر از ۱۵ متر است.



تست‌های درس اول (مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی)

۱- در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۰)

۳۲ (۱)	۳۴ (۲)	۳۶ (۳)	۳۸ (۴)
--------	--------	--------	--------

(سراسری ریاضی - ۹۳)

۲- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، کدام است؟

۲ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)	۵ (۴)
-------	-------	-------	-------

۳- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

$\frac{1}{3}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)	۲ (۳)	۳ (۴)
-------------------	-------------------	-------	-------

۴- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

(سراسری فارغ- ریاضی ۹۰)

۹ (۱)	۲۹ (۲)	۴۹ (۳)	۱۸ (۴)
-------	--------	--------	--------

۵- بین دو عدد ۲۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(سراسری فارغ- ریاضی ۹۱)

۴۲۸ (۱)	۴۸۴ (۲)	۴۸۶ (۳)	۴۸۸ (۴)
---------	---------	---------	---------

(سراسری فارغ- ریاضی ۹۳)

۶- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ ، کدام است؟

۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)
-------	-------	-------	-------

۷- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۰ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۱۲ است. قدر نسبت آن کدام است؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

$\frac{14}{9}$ (۱)	$\frac{16}{9}$ (۲)	$\frac{14}{15}$ (۳)	$\frac{16}{15}$ (۴)
--------------------	--------------------	---------------------	---------------------

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 = 20$ ، حاصل $a_7 + a_6 + a_8 + a_{11}$ ، کدام است؟

۴۰ (۱)	۲۰ (۲)	۶۰ (۳)	۸۰ (۴)
--------	--------	--------	--------

۹- اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۰ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

-۷ (۱)	-۶ (۲)	۵ (۳)	۴ (۴)
--------	--------	-------	-------

(گزینه ۲- ریاضی ۹۴)

۱۰- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = m$ و $a_2 = 2m - 1$ و $a_3 = m - 4$ باشد، S_4 چه قدر است؟

-۸۰ (۱)	-۸۱ (۲)	-۶۴ (۳)	-۶۵ (۴)
---------	---------	---------	---------

۱۱- اگر در یک دنباله حسابی $a_5 = 12$ و $a_{12} = 23$ باشد مجموع $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ چقدر است؟
 (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۲۰

۱۲- در یک دنباله عددی اگر به قدر نسبت آن ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۱۰ جمله اول چقدر افزوده می‌شود؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۱۳- در یک دنباله عددی غیر ثابت، جمله نهم نصف جمله پنجم است. مجموع چند جمله اول این دنباله صفر است؟
 (۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶

۱۴- در یک دنباله هندسی به صورت $\dots, b, a, 9, 4$ مجموع هشت جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟
 (۱) $\frac{97}{16}$ (۲) $\frac{65}{16}$ (۳) $\frac{97}{81}$ (۴) $\frac{16}{65}$

۱۵- در یک دنباله عددی $a_n = 2n - 5$ اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله باشد حاصل $\frac{S_{2n}}{S_n}$ بر حسب n کدام است؟
 (۱) $\frac{4n-8}{n-4}$ (۲) $\frac{4n-2}{n-8}$ (۳) $\frac{4n-2}{n-4}$ (۴) $\frac{2n-8}{n-2}$

کزینه ۲ - ریاضی ۹۳

۱۶- در یک دنباله حسابی، مجموع $2n$ جمله اول، از رابطه $2n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جمله اول این دنباله کدام است؟

کزینه ۲ - ریاضی ۹۴

(۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۷- حاصل $\frac{1-q^2+q^4-\dots-q^8}{1+q^4+q^8+q^{12}}$ به ازای $q = 1 - \sqrt{2}$ چقدر است؟
 (۱) $2\sqrt{2} - 2$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2 - 2\sqrt{2}$ (۴) $2 + 2\sqrt{2}$

کزینه ۲ - ریاضی ۹۵

۱۸- در دنباله هندسی متناهی a_1, a_2, \dots, a_n با قدر نسبت ۲، مجموع $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}$ چند برابر مجموع کل جملات است؟

کزینه ۲ - ریاضی ۹۵

(۱) $\frac{1}{y}$ (۲) $\frac{2}{y}$ (۳) $\frac{3}{y}$ (۴) $\frac{4}{y}$

۱۹- مجموع جملات سوم و سیزدهم یک دنباله حسابی برابر ۲۴ است. مجموع بانزده جمله اول این دنباله کدام است؟

کزینه ۲ - ریاضی ۹۵

(۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۰

۲۰- در یک دنباله حسابی جمله دهم ۲۰ واحد از جمله پنجم بیشتر است. اگر جمع جملات هشتم و دوازدهم ۷۶ برابر باشد، حداقل چند جمله از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۲۰۰ شود؟

کزینه ۲ - ریاضی ۹۵

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۲۱- اگر در یک دنباله حسابی جمله نوزدهم ۲ برابر جمله سیام باشد، مجموع چند جمله اول این دنباله برابر صفر است؟

کزینه ۲ - ریاضی ۹۶

(۱) ۴۱ (۲) ۸۱ (۳) ۸۲ (۴) ۴۰

